

O candidato, ao resolver esta prova, compromete-se a não recorrer a qualquer tipo de consulta.

Esta prova é constituída por 5 grupos de questões e tem a cotação total de 20 valores.

Justifique devidamente todas as respostas, indicando o seu raciocínio de forma clara, e apresente os cálculos efectuados.

A resolução deve ser efectuada a esferográfica, em folhas brancas sem linhas, e cada grupo de questões deve ser resolvido em folhas separadas.

Cotações

[2,0] 1. (a) Um código JULHO18 consiste numa sequência de seis caracteres em que cada caracter é uma letra do conjunto $\{A, B, C, D\}$. Determine o número de códigos JULHO18 em que a mesma letra ocorre exactamente quatro vezes. (Por exemplo, DAAAAAB e ADAADA são dois códigos JULHO18 nas condições pedidas.)

[2,0] (b) Quatro carros e três motos vão entrar, um de cada vez, numa garagem. De quantas maneiras diferentes podem estes veículos entrar na garagem, sabendo que as motos entram consecutivamente?

2. Determine o conjunto das soluções de cada uma das seguintes inequações:

[2,0] (a) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-10+x^2} \leq \left(\frac{1}{8}\right)^x$.

[2,0] (b) $\log_{\frac{1}{7}}(2^{-x} - 1) \geq 0$.

3. Determine, caso existam, os seguintes limites de sucessões:

[2,0] (a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{7}{9^n} \left(\frac{9n}{n+1}\right)^n$.

[2,0] (b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n^2 - 3}{n^2 - 1}\right)^{4n^2 + 5}$.

4. Considere a função f , real de variável real, definida por $f(x) = \begin{cases} x^2 - 8e^{9-x^2}, & x \leq 3 \\ \frac{3-x}{\ln(4-x)}, & x > 3 \end{cases}$.

[2,0] (a) Determine o domínio de f . Apresente o resultado na forma de intervalo ou união de intervalos de números reais.

[2,0] (b) Estude a continuidade da função f em $x = 3$.

[2,0] (c) Determine a equação reduzida da recta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa $a = -3$.

[2,0] 5. Sabendo que $x \in \mathbb{R}$ é tal que $\sin \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{7}}{3}$, calcule o valor de $\cos(\pi - x) + \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$.

Fim

(Formulário no verso desta folha)

Formulário

- $\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$
- $\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \beta \cos \alpha$
- $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta$
- Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n) com razão r :

$$\text{Progressão aritmética: } \frac{u_1 + u_n}{2} \times n$$

$$\text{Progressão geométrica: } u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$$

- Regras de derivação:

$$(u + v)' = u' + v'; \quad (uv)' = u'v + uv'; \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}; \quad (u^n)' = nu^{n-1}u' \quad (n \in \mathbb{R});$$

$$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u; \quad (\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u; \quad (\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u};$$

$$(e^u)' = u'e^u; \quad (a^u)' = u'a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\});$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}; \quad (\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

- $ax^2 + bx + c = 0$

$$\text{Fórmula resolvente: } x = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$