FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Versão A

Acesso de Maiores de 23 anos

Prova escrita de Matemática

7 de Junho de 2010

Duração da prova: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos.

Primeira Parte

As oito questões desta primeira parte são de escolha múltipla. Para cada uma delas são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta. Escreva na folha de resposta a letra correspondente à alternativa que seleccionar para responder a cada questão. Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível. Não apresente cálculos.

1. Um dado perfeito tem três faces verdes, duas azuis e uma preta. O dado vai ser atirado duas vezes ao ar. Qual é a probabilidade de sair duas vezes a face preta?

   A) $\frac{2}{6}$ B) $\frac{2}{36}$ C) $\frac{1}{36}$ D) $\frac{1}{6}$

2. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma determinada experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$). Sabe-se que

   - $P(A \cup B) = 0.3$
   - $P(B) = 0.1$
   - $P(A|B) = 0.4$

   (P designa probabilidade)

   Qual é a probabilidade de não se realizar A?

   A) 0.24 B) 0.76 C) 0.04 D) 0.96

3. Considere a função real de variável real definida por $f(x) = e^{x^2+x}$. A expressão de $f'(x)$ é igual a

   A) e^{x^2+x} B) $(2x+1)\, e^{x^2+x}$ C) $(2x+1)\, e^{2x+1}$ D) e^{2x+1}

4. O valor de $\cos(\operatorname{sen}(\pi))$ é igual a

A) 1 B) -1 C) 0 D) $\frac{1}{2}$

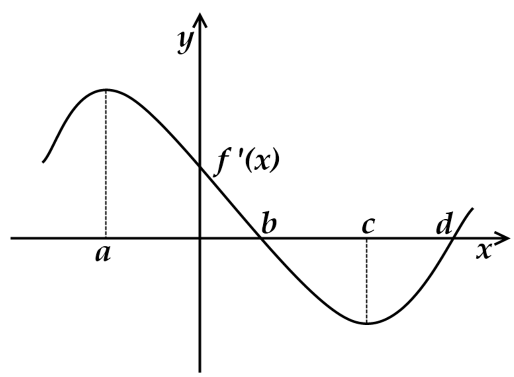
5. Seja z o número complexo $z = 2\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)$. O complexo z^4 é representado na forma algébrica por

A) $16\,i$ B) -16 C) 16 D) $8\,i$

6. Sendo $z_1 = 1 + i$ e $z_2 = 2\operatorname{cis}(\theta)$, o complexo $z_1 \times \overline{z}_2$ será um número real positivo se:

A) $\theta = \frac{1}{4}\pi$ B) $\theta = 0$ C) $\theta = \frac{5}{4}\pi$ D) $\theta = -\frac{1}{4}\pi$

7. O gráfico da figura



representa, num certo intervalo, a derivada da função f. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

A) f tem máximo local em a.
B) f tem mínimo local em c.
C) f tem máximo local em b.
D) f tem máximo local em d.

8. Sejam f e g duas funções reais, de variável real, tais que $f(2) = 3$, $f'(2) = 2$, $g'(3) = 5$ e $g'(2) = 4$. O valor de $(g \circ f)'(2)$ é igual a:

A) 15 B) 8 C) 12 D) 10

Segunda Parte

Nas questões desta segunda parte, apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

9. Considere o número complexo $w = 1 + i$.

   a) Escreva w na forma trigonométrica.

   b) Resolva, em relação à incógnita z, a equação $z^3 = w^{12}$.

   c) Represente graficamente o conjunto $A = \left\{ z \in \mathbb{C} : \ 1 \leq |z - w| \leq 2 \ \wedge \ 0 \leq \arg(z) \leq \dfrac{\pi}{2} \right\}$.

10. De um grupo de 8 homens e 6 mulheres pretende-se formar uma comissão constituída por 3 homens e 3 mulheres.

    a) Quantas comissões diferentes é possível constituir?

    b) Quantas comissões diferentes é possível constituir se dois dos homens se recusam a trabalhar em conjunto?

11. a) Com os elementos do conjunto $\{0, 2, 3, 5, 9\}$ quantos números de quatro algarismos diferentes se podem formar? De entre esses números, quantos são múltiplos de 5?

    b) Mostre que $n! + (n+1)! = (n+2) \times n!$ qualquer que seja o número natural n.

12. Considere a função real de variável real definida por

$$f(x) = 2 + \frac{1}{\sqrt{x+1}}.$$

    a) Determine o domínio de f.

    b) Escreva, caso existam, as equações das assímptotas horizontais ao gráfico de f.

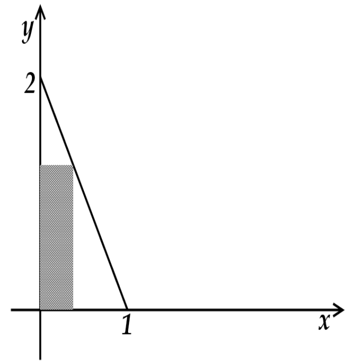
13. Considere a função real de variável real definida por $f(x) = \ln(x) - e^{-x}$.

    a) Recorrendo a métodos exclusivamente analíticos, mostre que f tem pelo menos um zero no intervalo $]1, e[$.

    b) Recorrendo a métodos exclusivamente analíticos, mostre que f é estritamente crescente em $[1, +\infty[$.

    c) Mostre que a função f tem apenas um zero no intervalo $[1, +\infty[$.

14. O rectângulo da figura tem um dos vértices no ponto $(0,0)$, outro no ponto $(x,0)$ e outro no ponto (x,y) pertencente ao segmento de recta que une os pontos $(1,0)$ e $(0,2)$.



a) Mostre que a área do rectângulo é expressa, em função de x, por $A(x) = 2\,x\,(1-x)$.

b) Para que valor de x se obtém o rectângulo de área máxima?

15. Uma substância radioactiva desintegra-se segundo uma lei exponencial do tipo $m(t) = a\,2^{-kt}$ em que m representa a massa (em gramas) ao fim de t anos.

a) Qual o significado da constante a?

b) Determine k, sabendo que a massa inicial dá lugar a metade dessa massa ao fim de 10 anos.

c) Considerando o valor de k obtido na alínea b), determine a expressão de $m(t)$, sabendo que ao fim de 20 anos a massa da substância é de 5 gramas (se não resolveu a alínea b), suponha $k = 1/5$).

Cotações

Primeira parte	40
Cada resposta certa	5
Cada resposta errada	0
Cada questão não respondida ou anulada	0
Segunda parte	160
9	30
9. a)	8
9. b)	12
9. c)	10
10	20
10. a)	10
10. b)	10
11	20
11. a)	12
11. b)	8
12	20
12. a)	10
12. b)	10
13	25
13. a)	10
13. b)	10
13. c)	5
14	20
14. a)	10
14. b)	10
15	25
15. a)	5
15. b)	10
15. c)	10
Total	200

Formulário

Comprimento de um arco de circunferência

$\alpha\, r$ (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio*)

Áreas de figuras planas

Losango: $\dfrac{\textit{Diagonal maior} \times \textit{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\dfrac{\textit{Base maior} + \textit{Base menor}}{2} \times \textit{Altura}$

Polígono regular: *Semiperímetro* × *Apótema*

Sector circular: $\dfrac{\alpha\, r^2}{2}$ (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio*)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi\, r\, g$
(*r – raio da base; g – geratriz*)

Área de uma superfície esférica: $4\,\pi\, r^2$
(*r – raio*)

Volumes

Pirâmide: $\dfrac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Cone: $\dfrac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Esfera: $\dfrac{4}{3}\,\pi\, r^3$
(*r – raio*)

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cdot \cos b + \operatorname{sen} b \cdot \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b$

$\operatorname{tg}(a+b) = \dfrac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b}$

Complexos

$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho}\, \operatorname{cis} \dfrac{\theta + 2k\pi}{n},\ k \in \{0, \ldots, n-1\}$

Probabilidades

$\mu = \mathrm{x}_1\, \mathrm{p}_1 + \cdots + \mathrm{x}_\mathrm{n}\, \mathrm{p}_\mathrm{n}$

$\sigma = \sqrt{(\mathrm{x}_1 - \mu)^2\, \mathrm{p}_1 + \cdots + (\mathrm{x}_\mathrm{n} - \mu)^2\, \mathrm{p}_\mathrm{n}}$

Se X é N (μ, σ), então:

$\mathrm{P}(\mu - \sigma < \mathrm{X} < \mu + \sigma) \approxeq 0{,}6827$

$\mathrm{P}(\mu - 2\sigma < \mathrm{X} < \mu + 2\sigma) \approxeq 0{,}9545$

$\mathrm{P}(\mu - 3\sigma < \mathrm{X} < \mu + 3\sigma) \approxeq 0{,}9973$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cdot \cos u$

$(\cos u)' = -\, u' \cdot \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u' \cdot e^u$

$(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \cdot \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$