FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Versão A

Acesso de Maiores de 23 anos

Prova escrita de Matemática

29 de Junho de 2011

Duração da prova: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos.

Primeira Parte

As oito questões desta primeira parte são de escolha múltipla. Para cada uma delas são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta. Escreva na folha de resposta a letra correspondente à alternativa que seleccionar para responder a cada questão. Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível. Não apresente cálculos.

1. Quatro livros de história, seis livros de filosofia e dois de matemática devem ser arrumados numa prateleira de uma biblioteca. De quantas formas diferentes se pode fazer a arrumação se os livros de cada disciplina ficarem juntos?

   A) $4 \times 6 \times 2 \times 3$ B) $4! \times 6! \times 2! \times 3!$ C) $4! \times 6! \times 2!$ D) $4! \times 6! \times 2! \times 3$

2. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma determinada experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$). Sabe-se que:

   - $P(A) = 0.3$
   - $P(B) = 0.1$
   - $P(A \mid B) = 0.4$

   (P designa probabilidade)

   Qual é a probabilidade de se realizar pelo menos um dos acontecimentos A e B?

   A) 0.4 B) 0.04 C) 0.36 D) 0.44

3. Considere cinco pontos do plano escolhidos de forma que não haja, entre os cinco pontos, três que sejam colineares. Quantas rectas diferentes podemos definir com estes pontos?

   A) 10 B) 20 C) 5 D) 15

4. Considere a função real, de variável real, definida por $\varphi(x) = \cos(x^3 - x)$. A expressão de $\varphi'(x)$ é igual a

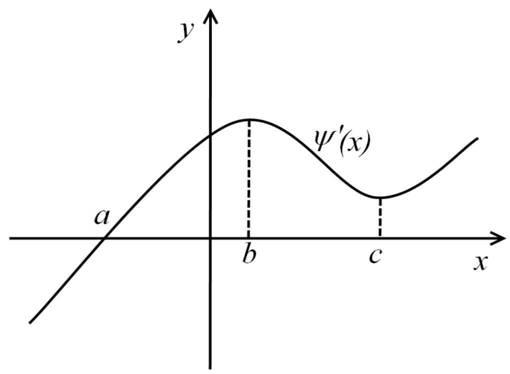
A) $-\operatorname{sen}(x^3 - x)$

B) $(1 - 3\,x^2)\operatorname{sen}(x^3 - x)$

C) $3\,x^3 - 1 - \operatorname{sen}(x^3 - x)$

D) $-\operatorname{sen}(3\,x^2 - 1)$

5. O gráfico da figura



representa, num certo intervalo, a derivada da função ψ. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

A) ψ é monótona.

B) ψ tem mínimo local em a.

C) ψ tem máximo local em b.

D) ψ tem mínimo local em c.

6. Considere a função real, de variável real, definida por

$$\zeta(x) = \begin{cases} \ln(-x+1), & \text{se } \ x \leq 0 \\ \dfrac{\ln(x+1)}{x}, & \text{se } \ x > 0. \end{cases}$$

Considere a sucessão de termo geral $u_n = \dfrac{1}{n}$. Qual é o valor de $\lim\limits_{n \to +\infty} \zeta(u_n)$?

A) 0

B) 1

C) $+\infty$

D) $-\infty$

7. O número complexo $z = 2\operatorname{cis}\left(\dfrac{3\pi}{4} + \theta\right)$ é um número real positivo se

A) $\theta = \dfrac{\pi}{4}$

B) $\theta = \dfrac{3\pi}{4}$

C) $\theta = \dfrac{5\pi}{4}$

D) $\theta = \dfrac{7\pi}{4}$

8. Se $z_1 = 3 + 4\,i$ e $z_2 = 2\operatorname{cis}\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$, então $|z_1 \times \overline{z}_2|$ é igual a:

A) 14

B) 24

C) 10

D) 9

Segunda Parte

Nas questões desta segunda parte, apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

9. Considere os números complexos $z_1 = \sqrt[3]{2}\,\text{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right)$ e $z_2 = -1 + i$.

   a) Determine o número complexo $w = \dfrac{2i + z_1^3}{\overline{z}_2}$. Apresente o resultado na forma trigonométrica.

   b) Sabendo que $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ e $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, calcule $|z_1 + z_2|$ (não necessita de simplificar).

10. a) Em Portugal as matrículas dos carros têm um grupo de duas letras entre dois grupos de dois algarismos. As letras e os algarismos pode ser iguais ou diferentes. Com este processo de construir matrículas quantas diferentes se podem formar? (Nota: considere que o alfabeto tem 23 letras)

    b) Mostre que ${}^nC_k = {}^nC_{n-k}$ quaisquer que sejam os números naturais n e k com $k \leq n$.

11. Um saco contém 10 bolas azuis, 5 verdes e 2 pretas. Considere que se retiram, sem reposição e sucessivamente, 4 bolas do saco.

    a) Qual é a probabilidade de tirar a seguinte sequência de bolas: azul, azul, verde, verde?

    b) Qual é a probabilidade de tirar pelo menos uma bola azul?

12. Seja $a \in \mathbb{R}$. Considere a função real de variável real definida por

$$f(x) = \begin{cases} \ln(x+1) + a, & \text{se } x < 0 \\ -x^3 - 2x + 1, & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

    a) Determine o domínio de f.

    b) Determine a de modo que f seja contínua em $x = 0$.

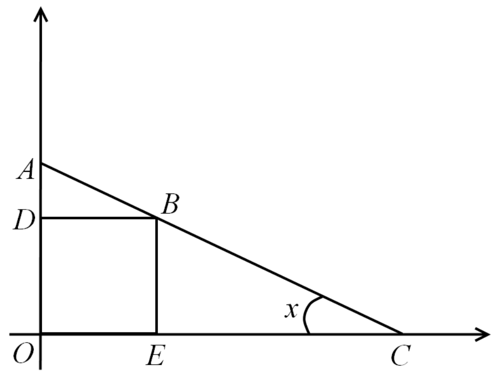
    c) Mostre que f tem um, e um só, zero no intervalo $]0, 1[$.

13. Considere a função real de domínio $\mathbb{R}^+$ definida por $g(x) = \dfrac{1}{x} + 4\,x + 1$.

    a) Recorrendo a métodos exclusivamente analíticos, mostre que g tem um, e um só, mínimo local.

    b) Mostre que o gráfico de g tem uma assímptota oblíqua e determine a equação reduzida dessa assímptota.

14. Na figura, A, B e C são colineares, O é a origem das coordenadas, $B = (1, 1)$, O, B, D e E são vértices de um quadrado, A e D estão sobre o eixo das ordenadas e C e E sobre o eixo das abcissas. x é a amplitude, em radianos, do ângulo OCA ($x \in]0, \frac{\pi}{2}[$).



a) Calcule a área do triângulo $[BEC]$ em função de $\text{tg}(x)$.

b) Calcule a área do triângulo $[ADB]$ em função de $\text{tg}(x)$.

c) Mostre que a área do triângulo $[AOC]$ é expressa por

$$A(x) = 1 + \frac{\text{tg}(x)}{2} + \frac{1}{2\,\text{tg}(x)}.$$

15. Em determinado momento é despejado um poluente num curso de água. Após t horas de ter sido despejado, a concentração do poluente num ponto de controlo é dada, em mg/l, pela expressão

$$C(t) = t\,e^{-0.2t}$$

a) Calcule $\lim_{t \to +\infty} C(t)$. Qual o significado deste valor no contexto da situação apresentada?

b) Determine ao fim de quantas horas se verifica a concentração máxima no ponto de controlo.

Cotações

Primeira parte	40
Cada resposta certa	5
Cada resposta errada	0
Cada questão não respondida ou anulada	0
Segunda parte	160
9	25
9. a)	15
9. b)	10
10	20
10. a)	10
10. b)	10
11	20
11. a)	10
11. b)	10
12	30
12. a)	8
12. b)	7
12. c)	15
13	20
13. a)	10
13. b)	10
14	25
14. a)	10
14. b)	10
14. c)	5
15	20
15. a)	10
15. b)	10
Total	200

Formulário

Comprimento de um arco de circunferência

αr (*α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio*)

Áreas de figuras planas

Losango: $\dfrac{\textit{Diagonal maior} \times \textit{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\dfrac{\textit{Base maior} + \textit{Base menor}}{2} \times \textit{Altura}$

Polígono regular: *Semiperímetro × Apótema*

Sector circular: $\dfrac{\alpha r^2}{2}$ (*α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio*)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi r g$
(*r – raio da base; g – geratriz*)

Área de uma superfície esférica: $4 \pi r^2$
(*r – raio*)

Volumes

Pirâmide: $\dfrac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Cone: $\dfrac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Esfera: $\dfrac{4}{3} \pi r^3$
(*r – raio*)

Trigonometria

$\text{sen}\,(a+b) = \text{sen}\,a \cdot \cos b + \text{sen}\,b \cdot \cos a$

$\cos\,(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \text{sen}\,a \cdot \text{sen}\,b$

$\text{tg}\,(a+b) = \dfrac{\text{tg}\,a + \text{tg}\,b}{1 - \text{tg}\,a \cdot \text{tg}\,b}$

Complexos

$(\rho \,\text{cis}\, \theta)^n = \rho^n \,\text{cis}\,(n\theta)$

$\sqrt[n]{\rho \,\text{cis}\, \theta} = \sqrt[n]{\rho}\ \text{cis}\ \dfrac{\theta + 2k\pi}{n},\ k \in \{0, \ldots, n-1\}$

Probabilidades

$\mu = x_1 p_1 + \cdots + x_n p_n$

$\sigma = \sqrt{(x_1 - \mu)^2 p_1 + \cdots + (x_n - \mu)^2 p_n}$

Se X é N(μ, σ), então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0,6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0,9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0,9973$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\text{sen}\,u)' = u' \cdot \cos u$

$(\cos u)' = -\,u' \cdot \text{sen}\,u$

$(\text{tg}\,u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u' \cdot e^u$

$(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \cdot \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen}\,x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$