



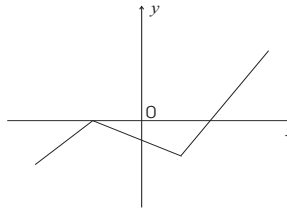
Exame Ad-Hoc de Matemática

19 de Julho de 2006

Primeira Parte

As cinco questões desta primeira parte são de escolha múltipla. Para cada uma delas são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta. Escreva na folha de resposta a letra correspondente à alternativa que seleccionar para responder a cada questão. Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível. Não apresente cálculos.

1. Se $f(x) = e^{\sin(3x)}$, então $f'(\pi)$ será igual a:
(a) -3 ; (b) $3e$; (c) 3 ; (d) 1 .
2. A figura representa o gráfico da derivada de uma função g , de domínio \mathbb{R} .



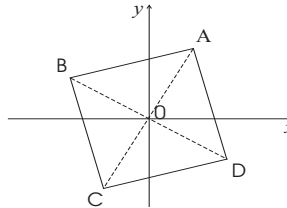
Qual das proposições seguintes é verdadeira?

- (a) A função g é decrescente em \mathbb{R} ;
(b) A função g é crescente em \mathbb{R} ;
(c) A função g tem um único extremo local em \mathbb{R} ;
(d) A função g tem dois extremos locais em \mathbb{R} .
3. Sendo $L = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \ln(x)}{1 + \ln(x)}$ e $M = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^{2x}}$, então:
(a) $L = -\infty$ e $M = +\infty$; (b) $L = -1$ e $M = +\infty$;
(c) $L = +\infty$ e $M = 0$; (d) $L = -1$ e $M = 0$.
4. Em relação a uma função f , contínua em \mathbb{R} , sabe-se que: f é estritamente decrescente; $f(0) = 2$; as rectas de equação $y = 1$ e $y = -x - 2$ são assíntotas do gráfico de f . Qual é o contradomínio desta função?
(a) $] -\infty, 1[$; (b) $]1, +\infty[$; (c) \mathbb{R} ; (d) $[2, +\infty[$.
5. Sendo $z_1 = 1 - i$ e $z_2 = 2 \operatorname{cis}(\theta)$, o complexo $\bar{z}_1 \times z_2$ será um número real positivo se:
(a) $\theta = \frac{3}{4} \pi$; (b) $\theta = \frac{5}{4} \pi$; (c) $\theta = 0$; (d) $\theta = -\frac{\pi}{4}$.

Segunda Parte

Nas questões desta segunda parte, apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

6. Sete amigos vão ao cinema e ficam sentados juntos, na mesma fila.
- (a) De quantas formas diferentes se poderão sentar de modo a que o João e o Francisco fiquem nos extremos?
 - (b) Nas condições da alínea anterior, qual é a probabilidade de a Ana e a Joana ficarem juntas?
7. Seja g uma função de domínio \mathbb{R} , cuja 2ª derivada é definida por $g''(x) = (x^3 - x^2) e^x$.
- (a) Mostre que g é contínua em \mathbb{R} .
 - (b) Determine os pontos de inflexão e o sentido das concavidades de g .
 - (c) Supondo que $g'(1) < 0$ e $g'(2) > 0$, mostre que g admite um extremo local no intervalo $]1, 2[$. Indique se é máximo ou mínimo.
8. No plano complexo da figura, os pontos A , B , C e D , são vértices de um quadrado inscrito numa circunferência de centro na origem e raio igual a 3. O ponto D é o afixo do complexo $z = 3 \operatorname{cis} \left(-\frac{\pi}{6} \right)$.



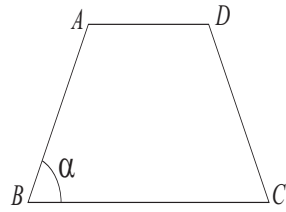
- (a) Represente na forma trigonométrica os complexos que têm como afixos os pontos A , B e C .
 - (b) Sabendo que z é uma das raízes quartas de um complexo w , escreva w na forma algébrica.
9. Seja h a função definida por $h(x) = \ln \left(\frac{x+1}{x^2-4} \right)$.
- (a) Determine analiticamente:
 - i. O seu domínio.
 - ii. Os zeros de h .
 - (b) Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$.

10. $[ABCD]$ é um trapézio isósceles, sendo $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = 1$ e $\alpha \in \left] \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2} \right]$

(a) Mostre que $\overline{AD} = 1 - 2 \cos(\alpha)$

(b) Nas condições da figura, entre que valores poderá variar \overline{AD} ?

(c) Mostre que para cada $\alpha \in \left] \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2} \right]$, a área do trapézio é igual a $\sin(\alpha) - \frac{1}{2} \sin(2\alpha)$.



Cotações

Primeira parte	45
Cada resposta certa	+ 9
Cada resposta errada	- 3
Cada questão não respondida ou anulada	0
Um total negativo nesta parte da prova vale zero pontos	
Segunda parte	155
6	25
6. (a)	10
6. (b)	15
7	35
7. (a)	10
7. (b)	12
7. (c)	13
8	30
8. (a)	15
8. (b)	15
9	35
9. (a) i.	12
9. (a) ii.	13
9. (b)	10
10	30
10. (a)	10
10. (b)	10
10. (c)	10
Total	200