FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Versão A

Acesso de Maiores de 23 anos

Prova escrita de Matemática

17 de Julho de 2008

Primeira Parte

As oito questões desta primeira parte são de escolha múltipla. Para cada uma delas são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta. Escreva na folha de resposta a letra correspondente à alternativa que seleccionar para responder a cada questão. Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível. Não apresente cálculos.

1. Considere a função $g(x) = |\cos(x) - 1|$. No intervalo $[0, 2\pi]$, a função g atinge o valor máximo para x igual a

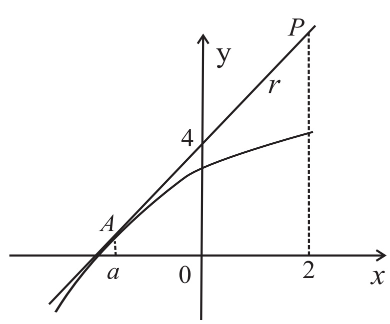
   A) 0 B) π C) $\frac{\pi}{2}$ D) $\frac{3\pi}{2}$

2. Se $\log_2(m) = x$ e $\log_2(n) = y$, então $m \times n$ é igual a

   A) 2^{x+y} B) 2^{xy} C) 4^{x+y} D) 4^{xy}

3. Na figura, a recta r é tangente ao gráfico da função f no ponto A e $f'(a) = 2$. Quais as coordenadas do ponto P?

   A) $(2, 5)$ B) $(2, 7)$ C) $(2, 8)$ D) $(2, 16)$



4. O código de um cofre é constituído por uma sequência de 4 letras (diferentes) seguidas de 3 algarismos (diferentes). Sendo a primeira letra uma vogal e o último algarismo ímpar, quantos códigos diferentes se poderão definir com as letras da palavra LISBOA e os algarismos de 1897?

   A) ${}^{10}A_7$ B) $9 \times {}^{8}C_5$ C) ${}^{6}A_4 \times {}^{4}A_3$ D) $9 \times {}^{5}A_3 \times {}^{3}A_2$

5. Num saco colocam-se 9 bolas numeradas de 1 a 9. Retirando ao acaso e simultaneamente 2 bolas e multiplicando os números extraídos, a probabilidade de o produto obtido ser um número par é

A) $\frac{17}{36}$ B) $\frac{11}{36}$ C) $\frac{13}{18}$ D) $\frac{11}{18}$

6. Sendo i a unidade imaginária e $n \in \mathbb{N}$, qual das seguintes afirmações é <u>FALSA</u>?

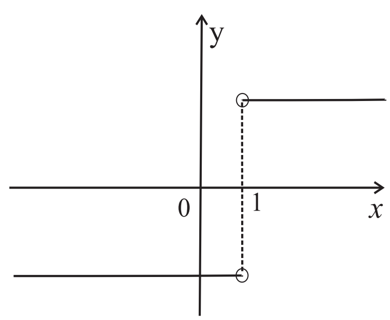
A) $i^{4n} = 1$ B) $i^{4n+2} = -1$ C) $i^{n+4} = i^n$ D) $i^{4n+1} = -i$

7. Sendo $z = 1 + \sqrt{3}\, i$ e $w = \text{cis}(\pi/6))$, qual é o argumento do número complexo $z \times \overline{w}$?

A) $\frac{\pi}{6}$ B) $\frac{\pi}{2}$ C) $-\frac{\pi}{6}$ D) $\frac{2\,\pi}{3}$

8. O gráfico da figura pode representar a derivada de qual das seguintes funções?

A) $f(x) = 2\,|x| - |x|$ C) $f(x) = 2\,x - |x|$
B) $f(x) = |2\,x - 2|$ D) $f(x) = |x - 1| + x$



Segunda Parte

Nas questões desta segunda parte, apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

9. Com uma moeda de 10 cêntimos, uma de 20 cêntimos, uma de 50 cêntimos, uma de 1 euro e duas de 2 euros, quantas quantias diferentes é possível formar agrupando 3 moedas?

10. Considere uma moeda viciada com duas faces, A e B. Lançando a moeda ao ar, a probabilidade de sair a face A é $0,6$.

    a) Qual a probabilidade de sair a face B?

    b) Efectuando 3 lançamentos, qual a probabilidade de obter

       i. 3 vezes a face B?

       ii. pelo menos 2 vezes a face A?

11. Considere o número complexo $w = 1 - i$.

    a) Escreva w na forma trigonométrica.

    b) Resolva, em relação à incógnita z, a equação $z^4 = 4\,w^{20}$

    c) Represente graficamente o conjunto $A = \left\{ z \in \mathbb{C} : \ |z - w| \leq 1 \ \wedge \ \dfrac{\pi}{4} \leq \arg(z - w) \leq \dfrac{3\pi}{2} \right\}$.

12. Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} 1 - e^x, & \text{se } x \leq 0 \\ \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right), & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

    a) Escreva, caso existam, as equações das assímptotas ao gráfico de f, paralelas aos eixos coordenados.

    b) A função admite um mínimo local para $x = 0$. Justifique esta afirmação.

    c) Mostre que esse mínimo é o único extremo da função f.

13. Uma população de batérias evolui de acordo com uma lei do tipo $P(t) = a - b \times 10^{-t}$ em que $P(t)$ representa o número (aproximado) de elementos da população ao fim de t horas.

    a) Determine a e b sabendo o número inicial de elementos da população é 10^6 e que ao fim de 1 hora há 10^7 elementos na população.

    b) Determine $\lim\limits_{t \to +\infty} P(t)$ e interprete o valor obtido no contexto do problema.

    c) Estude a função P, quanto à monotonia.

14. Considere a função f definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = \dfrac{x}{2} + \operatorname{sen}\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$.

    a) Mostre que a função f tem, pelo menos, um zero no intervalo $]0, \pi[$.

    b) Mostre que a função f tem apenas um zero no intervalo $]0, \pi[$.

Cotações

Primeira parte	40
Cada resposta certa	5
Cada resposta errada	0
Cada questão não respondida ou anulada	0
Segunda parte	160
9	20
10	30
10. (a)	5
10. (b) i.	10
10. (b) ii.	15
11	30
11. (a)	10
11. (b)	10
11. (c)	10
12	30
12. (a)	10
12. (b)	10
12. (c)	10
13	30
13. (a)	10
13. (b)	10
13. (c)	10
14	20
14. (a)	10
14. (b)	10
Total	200