FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Versão A

Acesso de Maiores de 23 anos

Prova escrita de Matemática

17 de Julho de 2009

Primeira Parte

As oito questões desta primeira parte são de escolha múltipla. Para cada uma delas são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta. Escreva na folha de resposta a letra correspondente à alternativa que seleccionar para responder a cada questão. Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível. Não apresente cálculos.

1. Numa empresa de confecção de vestuário, 10% dos artigos têm defeitos no tecido, 5% têm defeitos no acabamento e 2% têm defeitos de ambos os tipos. Retirando ao acaso uma peça de vestuário, qual a probabilidade de que não tenha qualquer tipo de defeito?

   A) $0,83$ B) $0,85$ C) $0,87$ D) $0,8$

2. Numa caixa de 15 lâmpadas, existem 5 defeituosas. Retirando aleatoriamente 2 lâmpadas da caixa, qual a probabilidade de pelo menos uma ser defeituosa?

   A) $1-\frac{{}^{10}C_2}{{}^{15}C_2}$ B) $\frac{{}^{10}C_2}{{}^{15}C_2}$ C) $\frac{2}{15}$ D) $\frac{3}{15}$

3. Considere a função $f(x)=\ln\left(\frac{1}{x}\right)$. A expressão de $f'(x)+2\,f''(x)$ é igual a

   A) $-\frac{4+x}{x^3}$ B) $x+2$ C) $\frac{2-x}{x^2}$ D) $\frac{2+x}{x^2}$

4. O valor de $e^{\ln(2\,x)-2\ln(x)}$ é igual a

   A) 1 B) $2\,x-x^2$ C) $\frac{2+x}{x^2}$ D) $\frac{2}{x}$

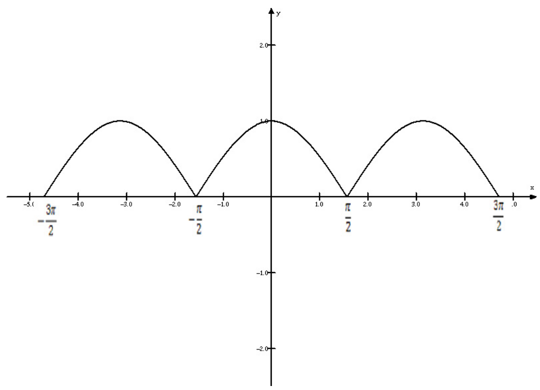
5. Seja z o número complexo $z=\sqrt{2}\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right)$. O complexo $z^3\times\overline{z}$ é representado na forma trigonométrica por

   A) $-4\operatorname{cis}\left(\frac{2\,\pi}{3}\right)$ B) $4\operatorname{cis}\left(\frac{4\,\pi}{3}\right)$ C) $4\operatorname{cis}\left(\frac{2\,\pi}{3}\right)$ D) $\sqrt{2}\operatorname{cis}\left(\frac{2\,\pi}{3}\right)$

6. Seja a um número real positivo e $w = a + a\,i$. As imagens geométricas dos números complexos w^2, w^3 e w^4 situam-se (considerar que os eixos pertencem ao quadrante):

   A) no 1º quadrante B) no 2º quadrante C) no 3º quadrante D) no 4º quadrante

7. O gráfico da figura



   representa, no intervalo $\left[-\dfrac{3\,\pi}{2}, \dfrac{3\,\pi}{2}\right]$, a função

   A) $f(x) = |\cos(x)|$

   B) $f(x) = \cos(x) + \cos(-x)$

   C) $f(x) = \cos(|x|)$

   D) $f(x) = |\text{sen}(x)|$

8. Seja f uma função tal que $f(2) = -1$ e $f'(2) = -2$. Considere as proposições:
   (i) f é contínua em $x = 2$;
   (ii) a recta de equação $y = -2\,x - 1$ é tangente ao gráfico de f no ponto $(2, -1)$.
   Então

   A) (i) e (ii) são ambas verdadeiras

   B) (i) e (ii) são ambas falsas

   C) (i) é verdadeira e (ii) é falsa

   D) (i) é falsa e (ii) é verdadeira

Segunda Parte

Nas questões desta segunda parte, apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

9. a) Calcule $z = i^{17} + \dfrac{3}{i^7}$ e apresente o resultado na forma trigonométrica.

   b) Sabendo que z é uma das raízes cúbicas de um número complexo w, calcule as restantes raízes.

10. No actual sistema, uma matrícula automóvel é constituída por um grupo de dois algarismos, um grupo de duas letras (das 23 do alfabeto português) e outro grupo de dois algarismos.

    a) Quantas matrículas deste tipo se podem construir?

    b) Quantas destas matrículas terminam num algarismo ímpar?

    c) Ecolhendo ao acaso um automóvel, qual a probabilidade de a sua matrícula ter um, e um só, B?

11. A probabilidade de uma borboleta apanhada numa certa região pertencer à espécie *Monarca* é $0,2$.

    a) Se um biólogo apanhar 7 borboletas nessa região, qual a probabilidade de, pelo menos, duas pertencerem a essa espécie?

    b) Determine o número mínimo de borboletas que o biólogo tem de apanhar para que a probabilidade de obter, pelo menos, uma *Monarca* seja superior a $0,9$.

12. Considere a função real de variável real definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{2\,x}, & \text{se } x < 0 \\[2ex] \dfrac{\cos(2\,x)}{x + k}, & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

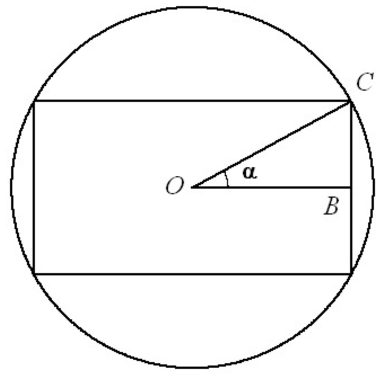
    Determine k de modo que f seja contínua em 0.

13. Considere a função real de variável real definida por $f(x) = -x + \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2\,x}\right)$.

    a) Recorrendo a métodos exclusivamente analíticos, mostre que f tem pelo menos um zero no intervalo $\left]\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}\right[$.

    b) Recorrendo a métodos exclusivamente analíticos, mostre que f é estritamente decrescente em $\left]\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{3}\right[$.

14. O rectângulo da figura está inscrito na circunferência de centro O e raio 2. O triângulo OBC é rectângulo.



a) Mostre que a área do rectângulo é expressa, em função de α, por $A(\alpha) = 8\,\text{sen}(2\,\alpha)$.

b) Para que valor de α se obtém o rectângulo de área máxima?

15. Numa empresa o lucro, L, originado pela produção de n peças, é dado, em milhares de euros, por

$$L(n) = \log_{10}(100 + n) + k.$$

Se não existir produção, não há lucro nem prejuízo.

a) Qual o valor de k?

b) Mostre que a função lucro é dada por $L(n) = \log_{10}(1 + 0,01\,n)$.

c) Quantas peças será necessário produzir para obter um lucro de três mil euros?

Cotações

Primeira parte	40
Cada resposta certa	5
Cada resposta errada	0
Cada questão não respondida ou anulada	0
Segunda parte	160
9	30
9. (a)	15
9. (b)	15
10	20
10. (a)	5
10. (b)	5
10. (c)	10
11	20
11. (a)	10
11. (b)	10
12	15
13	25
13. (a)	10
13. (b)	15
14	25
14. (a)	10
14. (b)	15
15	25
15. (a)	5
15. (b)	10
15. (c)	10
Total	200

Formulário

Comprimento de um arco de circunferência

αr (*α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio*)

Áreas de figuras planas

Losango: $\dfrac{\textit{Diagonal maior} \times \textit{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\dfrac{\textit{Base maior} + \textit{Base menor}}{2} \times \textit{Altura}$

Polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Sector circular: $\dfrac{\alpha r^2}{2}$ (*α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio*)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi r g$
(*r – raio da base; g – geratriz*)

Área de uma superfície esférica: $4 \pi r^2$
(*r – raio*)

Volumes

Pirâmide: $\dfrac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Cone: $\dfrac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Esfera: $\dfrac{4}{3} \pi r^3$
(*r – raio*)

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cdot \cos b + \operatorname{sen} b \cdot \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b$

$\operatorname{tg}(a+b) = \dfrac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b}$

Complexos

$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis} \dfrac{\theta + 2k\pi}{n}, \; k \in \{0, \ldots, n-1\}$

Probabilidades

$\mu = \mathrm{x}_1 \mathrm{p}_1 + \cdots + \mathrm{x}_n \mathrm{p}_n$

$\sigma = \sqrt{(\mathrm{x}_1 - \mu)^2 \mathrm{p}_1 + \cdots + (\mathrm{x}_n - \mu)^2 \mathrm{p}_n}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cdot \cos u$

$(\cos u)' = -\, u' \cdot \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u' \cdot e^u$

$(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \cdot \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$