FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Exame de acesso a alunos internacionais de ***Matemática A***
6 de Maio 2019
Duração: 2h00 tolerância: 30 m

Justifique as suas respostas e apresente os cálculos efectuados.
Mude de folha quando mudar de grupo.

Grupo 1

Na sua folha de resposta, indique, para cada item, qual a opção correcta.
Apresente os resultados na forma de uma grelha.

(*Resposta correcta:* $1,2$ *valores. Resposta errada:* $(-0,4)$ *valores.*)

1. Um certo código de acesso bancário é uma sequência de letras e algarismos, num total de seis elementos. Sabe-se que os três primeiros elementos do código formam uma sequência com as letras a,b e c e que os três últimos elementos formam uma sequência de três algarismos. Considere, por exemplo:

$$abc099$$

Quantos códigos existem verificando estas condições?

(a) 720 **(b)** 4320 **(c)** 6000 **(d)** 10^6

2. Dados dois acontecimentos A e B contidos num espaço de acontecimentos X, sabe-se que

$$P(\overline{A}) = 0,4 \quad \text{e que} \quad P(A \cup B) + P(A \cap B) = 0,8$$

Qual o valor de $P(B)$?

(a) $0,2$ **(b)** $0,4$ **(c)** $0,6$ **(d)** $0,8$

3. Sejam a, b números positivos tais que $\ln(a \cdot b) = 1 + \ln(2)$ e $2^a = 4$. Qual o valor de b?

(a) 1 **(b)** $\ln(4)$ **(c)** e **(d)** e^2

4. De um ângulo α sabemos que $\tan(\alpha) = \sqrt{3}$ e que α pertence ao terceiro quadrante. Qual o valor de $\sin(\alpha)$?

(a) $\frac{1}{2}$ **(b)** $-\frac{1}{2}$ **(c)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **(d)** $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

5. Seja $z = r \cdot \text{cis}(\theta)$ um número complexo não nulo. Sabemos que

$$w = i \cdot z$$

é um número real negativo. Qual das seguintes opções pode representar um argumento θ de z?

(a) 0 **(b)** $\frac{\pi}{2}$ **(c)** π **(d)** $\frac{3\pi}{2}$

6. De uma certa progressão geométrica sabe-se que o segundo termo é 6 e que a razão entre o quarto termo e o primeiro termo é $\frac{1}{8}$. Qual a soma dos seus cinco primeiros termos?

(a) 22 **(b)** $\frac{45}{2}$ **(c)** 23 **(d)** $\frac{93}{4}$

(Continua no verso)

Grupo 2

Considere em $\mathbb{R}^3$ o plano α de equação

$$x + y + z = 3$$

[1,5] **(a)** Verifique que a recta com r de equação vectorial

$$(x, y, z) = (0, 0, 0) + t(2, 2, 2) \qquad t \in \mathbb{R}$$

é perpendicular ao plano α e que a sua intersecção com α consiste no ponto $Q = (1, 1, 1)$.

[1,5] **(b)** Sabe-se que o plano α é tangente a uma superfície esférica S com centro na origem do referencial. Determine a equação da superfície esférica S.

Grupo 3

Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{\sin(x)} & \text{se} \quad x \in]-\pi, 0[\\ 2 & \text{se} \quad x = 0 \\ \frac{1-e^{-2x}}{x} & \text{se} \quad x > 0 \end{cases}$$

[1,5] **(a)** Mostre que f é contínua em $x = 0$.

[1,0] **(b)** Estude a existência de assímptota vertical para f em $x = -\pi$.

[1,5] **(c)** Calcule $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

Grupo 4

Considere a função diferenciável $g :]-1, +\infty[\mapsto \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \ln(x+1) - \dfrac{x}{x+1}$.

[1,0] **(a)** Verifique que $g'(x) = \dfrac{x}{(x+1)^2}$.

[1,5] **(b)** Determine os intervalos de monotonia da função g.

[1,5] **(c)** Sabe-se que a equação $g(x) = 1 - x$ tem uma única solução x_0 no intervalo $]0, 1[$.

Utilizando a calculadora gráfica, determine x_0. Apresente o resultado com três casas decimais após a virgula.

Opção para a alínea (c): Utilizando o Teorema de Bolzano, justifique a existência de pelo menos uma solução para a equação $g(x) = 1 - x$ no intervalo $]0, 1[$.

Grupo 5

[1,0] **(a)** Determine a forma algébrica do número complexo

$$w = \frac{(\sqrt{2} \cdot cis(\frac{\pi}{3}))^4}{i^3}$$

[0,8] **(b)** Determine o número complexo não nulo z sabendo que

$$|z - i|^2 = \frac{1}{2} \qquad \text{e} \qquad arg(z) = \frac{\pi}{4}$$

Fim