FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

Acesso de Maiores de 23 anos

Prova escrita de Matemática

7 de Junho de 2017

Duração da prova: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos.

Primeira Parte

As oito questões desta primeira parte são de escolha múltipla. Para cada uma delas são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correta. Escreva na folha de resposta a letra correspondente à alternativa que selecionar para responder a cada questão. Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível. Não apresente cálculos.

1. Suponha que temos um grupo de jovens com 15 rapazes e 10 raparigas dos quais queremos sentar 4 num carro. Sabendo que atrás vão 2 rapazes e à frente vão 2 raparigas, diga de quantas formas diferentes é possível sentar os jovens no carro.

   A) 4725 B) 4 C) 150 D) 18900

2. Considere a linha do triângulo de Pascal em que o produto do segundo elemento pelo penúltimo elemento é 49. Qual é a probabilidade de escolher, ao acaso, um elemento dessa linha que seja superior a 5.

   A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{3}{4}$ C) $\frac{1}{8}$ D) $\frac{2}{8}$

3. Considere, para um certo número real k, a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = ke^x + x$. O teorema de Bolzano garante que a função tem, pelo menos, um zero no intervalo $]0, 1[$.

   A qual dos intervalos seguintes pode pertencer k?

   A) $]-e, -\frac{1}{e}[$ B) $]-\frac{1}{e}, 0[$ C) $]0, \frac{1}{e}[$ D) $]\frac{1}{e}, 1[$

4. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, definida por $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(-x)}{x}$.

   Considere a sucessão de números reais (x_n) tal que $x_n = \dfrac{1}{n}$.

   Qual é o valor de $\lim f(x_n)$?

   A) -1 B) 0 C) 1 D) $+\infty$

5. Seja f uma função de domínio $]0, +\infty[$. A reta de equação $y = 2\,x - 5$ é assíntota do gráfico da função f.

   Qual é o valor de $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{6x - 1}{f(x)}$?

   A) 0 B) 2 C) 3 D) $+\infty$

6. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere o conjunto $A = \{z \in \mathbb{C} : i \times (z + \overline{z}) = 0\}$. Qual das retas seguintes pode ser a representação geométrica de, no plano complexo, do conjunto A?

   A) o eixo real
   B) o eixo imaginário
   C) a bissetriz dos quadrantes pares
   D) a bissetriz dos quadrantes ímpares

7. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z = 3 \operatorname{cis}\left(\dfrac{\pi}{8} - \theta\right)$, com $\theta \in \mathbb{R}$.

   Para qual dos valores seguintes de θ podemos afirmar que z é um número imaginário puro?

   A) $-\dfrac{\pi}{2}$ B) $\dfrac{\pi}{2}$ C) $\dfrac{\pi}{8}$ D) $\dfrac{5\pi}{8}$

8. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, o ponto A de coordenadas $(2, 0, 3)$, e o plano α, definido por $x - y - 2z = 3$.

   Seja r a reta perpendicular ao plano α que passa pelo ponto A.

   Qual das condições seguintes pode definir a reta r ?

   A) $x + 2 = z + 1 \wedge y = 0$
   B) $-x + 5 = y + 3 = \dfrac{z + 3}{2}$
   C) $\dfrac{x - 1}{2} = \dfrac{z + 2}{3} \wedge y = -1$
   D) $x - 2 = -y = z - 3$

Segunda Parte

Nas questões desta segunda parte, apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

9. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z_1 = \sqrt{2}\,\text{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)$ e $z_2 = 3$.

   Resolva as duas questões seguintes recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

   a) Determine o número complexo $w = \dfrac{z_1^4 + 4i}{i}$.
   Apresente o resultado na forma trigonométrica.

   b) Escreva uma condição, em $\mathbb{C}$, que defina, no plano complexo, a circunferência que tem centro na imagem geométrica de z_2 e que passa na imagem geométrica de z_1.

10. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma determinada experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$), tais que $P(A \cup B) = \frac{5}{6}$ e $P(A) = P(B)$ e $P(A|B) = 1/6$. Determine:

    a) o valor de $P(A)$.

    b) o valor de $P(A \cap B)$.

    c) averigúe se A e B são acontecimentos independentes.

11. Num saco existem quatro moedas falsas e seis moedas verdadeiras. Vão ser tiradas aleatoriamente duas moedas do saco, uma a seguir à outra. Qual a probabilidade de:

    a) as duas moedas serem verdadeiras?

    b) pelo menos uma delas ser verdadeira?

    c) a segunda ser falsa sabendo que a primeira era verdadeira?

12. Considere a função f de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} k + \dfrac{1 - e^{x-1}}{x-1} & \text{se } x < 1 \\ \\ -x + \ln x & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

    onde k designa um número real.

    Resolva as duas questões seguintes recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

    a) Determine k sabendo que f é contínua em $x = 1$.

    b) Considere $k = 3$ e estude a função f quanto à existência de assíntotas horizontais do gráfico de f.

13. Seja g uma função, de domínio $\mathbb{R}^+$, cuja derivada g', de domínio $\mathbb{R}^+$, é dada por

$$g'(x) = \ln(e^x + 6e^{-x} + 4x).$$

    Recorrendo a métodos exclusivamente analíticos, estude a função g quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.

14. Considere um trapézio retângulo $[ABCD]$. Sabe-se que:

- $\overline{BC} = \overline{CD} = 1$,
- $\widehat{ABC} = \widehat{BCD} = \dfrac{\pi}{2}$,
- α é a amplitude, em radianos, do ângulo $\widehat{ADC}$,
- $\alpha \in \left]\dfrac{\pi}{2}, \pi\right[$.

Resolva as duas questões seguintes recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

a) Mostre que o perímetro do trapézio retângulo é dado, em função de α, por

$$P(\alpha) = 3 + \frac{1 - \cos(\alpha)}{\operatorname{sen}(\alpha)}.$$

b) Para um certo número real θ, tem-se que $\operatorname{tg}(\theta) = -\sqrt{8}$, com $\dfrac{\pi}{2} < \theta < \pi$. Determine o valor exato de $P'(\theta)$.

Cotações

Primeira parte	40
Cada resposta certa	5
Cada resposta errada	0
Cada questão não respondida ou anulada	0
Segunda parte	160
9	20
9. a)	10
9. b)	10
10	25
10. a)	10
10. b)	10
10. c)	5
11	25
11. a)	5
11. b)	10
11. c)	10
12	30
12. a)	15
12. b)	15
13	30
14	30
14. a)	15
14. b)	15
Total	200