Acesso de Maiores de 23 anos

Prova escrita de Matemática

6 de Junho de 2018

Duração da prova: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos.

Primeira Parte

As oito questões desta primeira parte são de escolha múltipla. Para cada uma delas são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correta. Escreva na folha de resposta a letra correspondente à alternativa que selecionar para responder a cada questão. Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível. Não apresente cálculos.

1. Um saco contém bolas indistinguíveis ao tato e de duas cores diferentes: azul e verde. Sabe-se que o número de bolas azuis é 8 e que ao extrair-se, ao acaso, uma bola do saco, a probabilidade de ser azul é $\frac{1}{2}$. Quantas bolas verdes há no saco?

   A) 16 B) 12 C) 8 D) 4

2. Na sequência seguinte reproduzem-se os três primeiros elementos e os três últimos elementos de uma linha do Triângulo de Pascal: 1 15 105 ... 105 15 1.

   São escolhidos, ao acaso, dois elementos dessa linha. Qual é a probabilidade de a soma desses dois elementos ser igual a 105?

   A) 1 B) $\frac{1}{60}$ C) $\frac{1}{120}$ D) 0

3. Considere a função f de domínio $]0, +\infty[$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^x - 1 & \text{se } 0 < x \leq 2 \\ \\ \dfrac{4}{x} + 1 & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

   Seja (u_n) uma sucessão de números reais, de termos positivos, tal que $\lim f(u_n) = 3$.

   Qual das expressões seguintes pode definir o termo geral da sucessão (u_n)?

   A) $2 - \frac{1}{n}$ B) $2 + \frac{1}{n}$ C) $3 - \frac{1}{n}$ D) $3 + \frac{1}{n}$

4. Para um certo número real positivo k a função g de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{3x} & \text{se } x > 0 \\ \\ \ln(k-x) & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

é contínua. Qual é o valor de k?

A) $e^{\frac{1}{3}}$ B) e^3 C) $\dfrac{e}{3}$ D) $3e$

5. Qual é o valor de $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2} \operatorname{sen}^2\left(\dfrac{x}{2}\right)$?

A) 4 B) 0 C) $\dfrac{1}{4}$ D) $\dfrac{1}{2}$

6. Considere a função f de domínio $\mathbb{R}^-$, definida por $f(x) = \ln(-3x)$.

Qual é a solução da equação $f(x) = 2$?

A) $\dfrac{1}{2}e^3$ B) $-\dfrac{1}{2}e^3$ C) $-\dfrac{1}{3}e^2$ D) $\dfrac{1}{3}e^2$

7. Sejam k e t dois números reais e sejam $z_1 = (3k+2)+ti$ e $z_2 = (3t-4)+(2-5k)i$ dois números complexos.

Quais são os valores de k e de t para os quais z_1 é igual ao conjugado de z_2?

A) $k=-1$ e $t=3$ B) $k=1$ e $t=3$ C) $k=0$ e $t=-2$ D) $k=1$ e $t=-3$

8. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, o plano α, definido por $4x-z+1=0$.

Seja r uma reta perpendicular ao plano α.

Qual das condições seguintes pode definir a reta r ?

A) $\dfrac{x}{4} = y \wedge z = -1$

B) $x = 4 \wedge z = -1$

C) $x - 3 = \dfrac{z}{4} \wedge y = 0$

D) $\dfrac{x-3}{4} = -z \wedge y = 1$

Segunda Parte

Nas questões desta segunda parte, apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

9. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere

$$z_1 = 1\ ,\ z_2 = 5i\ \text{ e }\ z_3 = \operatorname{cis}\left(\frac{n\pi}{40}\right),\ n \in \mathbb{N}.$$

Resolva as duas questões seguintes recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

a) O complexo z_1 é raiz do polinómio $z^3 - z^2 + 16z - 16$. Determine, em $\mathbb{C}$, as restantes raízes do polinómio, apresentando-as na forma trigonométrica.

b) Determine o menor valor de n natural para o qual a imagem geométrica de $z_2 \times z_3$, no plano complexo, está no terceiro quadrante e pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares.

10. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma determinada experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$), com $P(A) \neq 0$.

Mostre que $P(B|A) \geq 1 - \dfrac{1 - P(B)}{P(A)}$.

11. Dos alunos de uma escola, sabe-se que:

- a quinta parte dos alunos tem computador portátil;
- metade dos alunos não sabe o nome do diretor;
- a terça parte dos alunos que não sabe o nome do diretor tem computador portátil.

a) Determine a probabilidade de um aluno dessa escola, escolhido ao acaso, não ter computador portátil e saber o nome do diretor. Apresente o resultado sob a forma de fração irredutível.

b) Admita que a escola tem 150 alunos. Pretende-se formar uma comissão de seis alunos para organizar a viagem de finalistas. Determine de quantas maneiras diferentes se pode formar uma comissão com, exatamente, quatro dos alunos que têm computador portátil.

12. Considere a função f de domínio $[0, +\infty[$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{2-x} - 1}{x - 2} & \text{se } 0 \leq x < 2 \\[2ex] \dfrac{x + 1}{\ln(x + 1)} & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

Resolva as três questões seguintes recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

a) Estude a função f quanto à existência de assíntotas verticais do seu gráfico.

b) Mostre, sem resolver a equação, que $f(x) = -3$ tem, pelo menos, uma solução em $]0, \frac{1}{2}[$.

c) Estude f quanto à monotonia em $]2, +\infty[$.

13. Numa marina, a profundidade de água, em metros, t horas após as zero horas de um certo dia, é dada por

$$P(t) = 2\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) + 8, \text{ em que } t \in [0, 24].$$

Resolva as duas questões seguintes recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

a) Determine a profundidade da água da marina às três horas da tarde, desse dia.

b) Determine a profundidade mínima, em metros, da água da marina, nesse dia.

14. Para a, b e n, números reais positivos, considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = a\cos(nx) + b\,\text{sen}(nx).$$

Mostre que $f''(x) + n^2 f(x) = 0$, para qualquer número real x.

Cotações

Primeira parte	40
Cada resposta certa	5
Cada resposta errada	0
Cada questão não respondida ou anulada	0
Segunda parte	160
9	20
9. a)	10
9. b)	10
10	25
11	25
11. a)	10
11. b)	15
12	40
12. a)	15
12. b)	10
12. c)	15
13	25
13. a)	10
13. b)	15
14	25
Total	200