FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

Concurso de acesso de Estudantes Internacionais

Prova escrita de Matemática

18 de Abril de 2018

Duração da prova: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos.

Primeira Parte

As oito questões desta primeira parte são de escolha múltipla. Para cada uma delas são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correta. Escreva na folha de resposta a letra correspondente à alternativa que selecionar para responder a cada questão. Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível. Não apresente cálculos.

1. O Henrique tem oito livros, todos diferentes, sendo três de História, três de Português e dois de Geografia. O Henrique pretende arrumar, numa prateleira, os oito livros, uns a seguir aos outros. De quantas formas diferentes o pode fazer, ficando os livros de História todos juntos numa das pontas?

   A) 72 B) 240 C) 720 D) 1440

2. Num dado clube desportivo praticam-se apenas duas modalidades: futebol e râguebi. Dos jovens inscritos no clube, 28 jogam apenas futebol, 12 jogam apenas râguebi e 12 jogam futebol e râguebi. Escolhendo ao acaso um dos jovens inscritos, qual é a probabilidade de o jovem jogar râguebi sabendo que joga futebol?

   A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{3}{10}$ C) $\frac{7}{10}$ D) $\frac{3}{7}$

3. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = e^x - 3$. Em qual dos intervalos seguintes o teorema de Bolzano permite afirmar que a equação $f(x) = -x - \frac{3}{2}$ tem, pelo menos, uma solução?

   A) $]0, \frac{1}{5}[$ B) $]\frac{1}{5}, \frac{1}{4}[$ C) $]\frac{1}{4}, \frac{1}{3}[$ D) $]\frac{1}{3}, 1[$

4. Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$g(x) = \begin{cases} e^x & \text{se } x \leq 0 \\ \ln x & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Considere a sucessão de números reais (u_n) tal que $u_n = \dfrac{1}{n}$. Qual é o valor de $\lim g(u_n)$?

A) $+\infty$ B) 1 C) 0 D) $-\infty$

5. De uma função f de domínio $\mathbb{R}$, sabe-se que:

- f é uma função par;
- $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - 2x) = 0$.

Qual é o valor de $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$?

A) $+\infty$ B) -2 C) 0 D) $-\infty$

6. Seja g a função, de domínio $]-2, +\infty[$, definida por $g(x) = \ln(x+2)$. Considere, num referencial o.n. xOy, um triângulo $[OAB]$ tal que:

- O é a origem do referencial;
- A é um ponto de ordenada 5;
- B é o ponto de interseção do gráfico da função g com o eixo das abcissas.

Qual é a área do triângulo $[OAB]$?

A) $\dfrac{5}{2}$ B) $\dfrac{1}{2}$ C) $\dfrac{5 \ln 2}{2}$ D) $\dfrac{\ln 2}{2}$

7. Considere um pentágono regular $[ABCDE]$, no plano complexo. O vértice A tem coordenadas $(1, 0)$ e os restantes vértices encontram-se dispostos segundo o sentido contrário ao dos ponteiros do relógio.

Qual dos números complexos seguintes tem por imagem geométrica o vértice D do pentágono?

A) $5 \operatorname{cis}\left(\dfrac{6\pi}{5}\right)$ B) $\operatorname{cis}\left(\dfrac{6\pi}{5}\right)$ C) $\operatorname{cis}\left(-\dfrac{\pi}{5}\right)$ D) $\operatorname{cis}\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$

8. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, o ponto A de coordenadas $(1, 0, 3)$ e o plano α, definido por $3x + 2y - 4 = 0$.

Seja β um plano perpendicular ao plano α e que passa pelo ponto A.

Qual das condições seguintes pode definir o plano β ?

A) $3x + 2y - 3 = 0$
B) $2x - 3y - z + 1 = 0$
C) $2x - 3y + z = 0$
D) $3x + 2y = 0$

Segunda Parte

Nas questões desta segunda parte, apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

9. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z_1 = \text{cis}\left(\dfrac{\pi}{7}\right)$ e $z_2 = 2 + i$.

   Resolva as duas questões seguintes recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

   a) Determine o número complexo $w = \dfrac{3 - i \times (z_1)^7}{\overline{z_2}}$, onde $\overline{z_2}$ designa o conjugado de z_2, apresentando o resultado na forma trigonométrica.

   b) Mostre que $|z_1 + z_2|^2 = 6 + 4\cos\left(\dfrac{\pi}{7}\right) + 2\,\text{sen}\left(\dfrac{\pi}{7}\right)$.

10. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos tais que $A \subset \Omega$, $B \subset \Omega$ e $P(B) \neq 0$.

    Mostre que $\dfrac{P(A \cup B)}{P(B)} - P(\overline{A}|B) = \dfrac{P(A)}{P(B)}$.

11. Considere um tetraedro regular e equilibrado com as faces numeradas de 1 a 4. Considere a experiência aleatória que consiste em lançar 3 vezes o tetraedro e registar, em cada lançamento, o número inscrito na face voltada para baixo.

    Seja X a variável aleatória "*número de vezes que, nesses três lançamentos do tetraedro, se regista o número 1*".

    Construa a tabela de distribuição de probabilidades da variável X, apresentando as probabilidades na forma de fracção.

12. Considere a função f de domínio $]-\infty, 2\pi]$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} ax + b + e^x & \text{se } x \leq 0 \\[2ex] \dfrac{x - \text{sen}(2x)}{x} & \text{se } 0 < x \leq 2\pi \end{cases}$$

    onde a e b designam números reais.

    Resolva as duas questões seguintes recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

    a) Prove que a reta de equação $y = ax + b$, com $a \neq 0$, é uma assíntota oblíqua do gráfico de f.

    b) Determine o valor de b, de modo que f seja contínua em $x = 0$.

13. Seja g uma função, de domínio $\left]-\dfrac{2\pi}{3}, -\dfrac{\pi}{3}\right]$, cuja derivada g', de domínio $\left]-\dfrac{2\pi}{3}, -\dfrac{\pi}{3}\right[$, é dada por

$$g'(x) = \log_2\left(-\frac{\pi}{6} - x\right).$$

    Recorrendo a métodos exclusivamente analíticos, estude a função g quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão no intervalo $\left]-\dfrac{2\pi}{3}, -\dfrac{\pi}{3}\right[$.

14. Considere, num referencial o.n. xOy, uma circunferência e um triângulo $[OAB]$.

Sabe-se que:

- a circunferência tem diâmetro $[OA]$;
- o vértice O do triângulo $[OAB]$ coincide com a origem do referencial;
- o ponto A tem coordenadas $(2,0)$;
- o ponto B desloca-se ao longo da semicircunferência superior.

Para cada posição do ponto B, seja α a amplitude do ângulo AOB, com $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Resolva as duas questões seguintes recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

a) Mostre que o perímetro do triângulo $[OAB]$ é dado, em função de α, por

$$f(\alpha) = 2\,(1 + \cos(\alpha) + \operatorname{sen}(\alpha)).$$

b) Determine o valor de α para o qual o perímetro do triângulo $[OAB]$ é máximo.

Cotações

Primeira parte	40
Cada resposta certa	5
Cada resposta errada	0
Cada questão não respondida ou anulada	0
Segunda parte	160
9	20
9. a)	10
9. b)	10
10	25
11	25
12	30
12. a)	15
12. b)	15
13	30
14	30
14. a)	15
14. b)	15
Total	200