O candidato, ao resolver esta prova, compromete-se a não recorrer a qualquer tipo de consulta.
Esta prova é constituída por 6 grupos de questões e tem a cotação total de 20 valores.
Justifique devidamente todas as respostas, indicando o seu raciocínio de forma clara, e apresente os cálculos efectuados.
A resolução deve ser efectuada a esferográfica, em folhas brancas sem linhas, e cada grupo de questões deve ser resolvido em folhas separadas.

Cotações

[1,5] **1.** (a) Um código MAIO18 consiste numa sequência de oito caracteres em que cada um dos cinco primeiros caracteres é o algarismo `0` ou `1` enquanto que cada um dos restantes caracteres é a letra `X`, `Y` ou `Z`. Por exemplo, `00110ZYZ` e `01010ZZZ` são códigos MAIO18. Quantos códigos MAIO18 existem com exactamente três caracteres iguais a `0`?

[1,5] (b) Seja $n \in \mathbb{N}$, com $n > 3$. Representando por $\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}$ o "*número de combinações de n elementos p a p*", mostre que

$$\begin{pmatrix} n \\ n-4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ n-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n+1 \\ n-3 \end{pmatrix} \quad .$$

2. Determine o conjunto das soluções de cada uma das seguintes inequações:

[2,0] (a) $4^{3x+1} > \left(\dfrac{1}{16}\right)^{1-3x}$.

[2,0] (b) $\log_{\frac{1}{4}}(x^2+x) \geq \log_{\frac{1}{4}}(x+9)$.

3. Pretende-se calcular o limite da sucessão de termo geral $u_n = \left(\dfrac{n}{n-1}\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\dfrac{1}{j(j+1)}\right)^{n^2}$.

[2,0] (a) Mostre, utilizando o princípio de indução matemática, que

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j(j+1)} = \frac{n}{n+1}\,, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

[2,0] (b) Utilize o resultado expresso na alínea anterior para determinar $\lim u_n$.
(*Recorde que:* $\lim\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e$.)

[2,0] **4.** Considere a função $f : \mathbb{R}\setminus\{0\} \mapsto \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{e^{x/2}-1}{x}$. Sabendo que f é estritamente crescente, determine o contradomínio de f.
(*Recorde que:* $\displaystyle\lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y} = 1$; $\displaystyle\lim_{y\to+\infty}\frac{e^y}{y^p} = +\infty \;\; (p \in \mathbb{R})$)

Cotações

5. Um ponto $P = (x, y)$, situado no primeiro quadrante, pertence ao gráfico da circunferência com equação

$$x^2 + y^2 = 2 \quad .$$

Considere o rectângulo inscrito na circunferência, com vértice P e simétrico em relação aos eixos coordenados.

[1,0] (a) Verifique que a área A do retângulo é dada, em função da abcissa x do ponto P, por

$$A(x) = 4x\sqrt{2 - x^2} \quad .$$

[2,0] (b) Determine a derivada de $A(x)$, indique os intervalos de monotonia da função $A(x)$ e estude a existência de extremos.

[1,0] (c) Indique as coordenadas de P de forma a que o rectângulo tenha área máxima.

[1,5] **6.** (a) Escreva o número complexo $w = (2 - 2i)^5$ na forma trigonométrica.

[1,5] (b) Represente geometricamente (diagrama de *Argand*) o conjunto dos pontos definido pelas imagens dos números complexos z tais que

$$|z - 2i| > 2 \qquad \text{e} \qquad \mathrm{Re}(z) = 1 \quad .$$

(Re(z) representa a parte real de z.)

Fim