NOVA SCHOOL OF SCIENCE & TECHNOLOGY
Departamento de Matemática

Acesso ao Ensino Superior de Estudantes Internacionais (3ª Fase)
Prova de **Matemática** – 20 de Janeiro de 2022
Duração: 2 horas

O candidato, ao resolver esta prova, compromete-se a não recorrer a qualquer tipo de consulta.
Esta prova é constituída por 5 grupos de questões e tem a cotação total de 20 valores.
Justifique devidamente todas as respostas, indicando o seu raciocínio de forma clara, e apresente os cálculos efectuados.
A resolução deve ser efectuada a esferográfica, em folhas brancas sem linhas, e cada grupo de questões deve ser resolvido em folhas separadas.

Cotações

[2,0] **1.** (a) Um código Janeiro20 consiste numa sequência de cinco caracteres em que cada caracter é uma letra do conjunto $\{\mathtt{A},\mathtt{B},\mathtt{C},\mathtt{D},\mathtt{E},\mathtt{F}\}$. Determine o número de códigos Janeiro20 que utilizam apenas quatro das letras do conjunto $\{\mathtt{A},\mathtt{B},\mathtt{C},\mathtt{D},\mathtt{E},\mathtt{F}\}$. (Por exemplo, `AABCD`, `ABBEF` e `EBAEC` são códigos Janeiro20 nas condições pedidas.)

[2,0] (b) Considere um conjunto de animais constituído por oito cães e sete gatos. Determine o número de grupos que se podem formar com estes animais, de forma a que cada grupo tenha seis animais e pelo menos quatro destes animais sejam gatos.

2. Determine o conjunto das soluções de cada uma das seguintes inequações:

[2,0] (a) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^{8x} \leq 9^{2x^2}$.

[2,0] (b) $\log_{\frac{1}{3}}\left(1 - \dfrac{5}{x^2-4}\right) \geq 0$.

[2,0] **3.** (a) Mostre que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{4}{5^k} = 1 - \frac{1}{5^n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

[2,0] (b) Calcule o limite da sucessão de termo geral $u_n = \left(\dfrac{2+3n}{-4+3n}\right)^{n-7}$.

4. Considere a função f, real de variável real, definida por $f(x) = \ln\left(\dfrac{x+2}{1-e^x}\right)$.

[2,0] (a) Determine o domínio de f.

[2,0] (b) Determine a derivada de f e o respectivo domínio.

5. Considere a função f, real de variável real, definida por $f(x) = \begin{cases} x + \ln(2-x), & x < 1 \\ e^{1-x}, & x \geq 1 \end{cases}$.

[2,0] (a) Estude a continuidade da função f em $x = 1$ e, recorrendo à definição de derivada de uma função num ponto, calcule as derivadas laterais de f no ponto $x = 1$.

[2,0] (b) Determine a equação reduzida da recta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 2.

Fim

(Formulário no verso desta folha)

Formulário

- $\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

- $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

- $\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\beta\cos\alpha$

- $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$

- Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n) com razão r:

  Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

  Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1-r^n}{1-r}$

- Regras de derivação:
  $(u+v)' = u' + v'$; $\quad (uv)' = u'v + uv'$; $\quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$; $\quad (u^n)' = nu^{n-1}u' \quad (n \in \mathbb{R})$;
  $(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$; $\quad (\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$; $\quad (\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$;
  $(e^u)' = u'e^u$; $\quad (a^u)' = u'a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$;
  $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$; $\quad (\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$