Acesso ao Ensino Superior de Estudantes Internacionais
Prova de **Matemática** – 2 de Junho de 2022
Duração: 2 horas

O candidato, ao resolver esta prova, compromete-se a não recorrer a qualquer tipo de consulta.
Esta prova é constituída por 5 grupos de questões e tem a cotação total de 20 valores.
Justifique devidamente todas as respostas, indicando o seu raciocínio de forma clara, e apresente os cálculos efectuados.
A resolução deve ser efectuada a esferográfica, em folhas brancas sem linhas, e cada grupo de questões deve ser resolvido em folhas separadas.

Cotações

[2,0] **1.** (a) Um código JUNHO02 consiste numa sequência de cinco caracteres em que cada caracter é uma letra do conjunto $\{\mathtt{A}, \mathtt{B}, \mathtt{C}, \mathtt{D}\}$. Determine o número de códigos JUNHO02 em que a letra `A` ocorre exactamente duas vezes. (Por exemplo, `DAACB`, `DAADD` e `DADAD` são três códigos JUNHO02 nas condições pedidas.)

[2,0] (b) Considere um conjunto de animais constituído por seis cães e cinco gatos. Determine o número de grupos distintos que se podem formar com estes animais, de forma a que cada grupo tenha cinco animais e pelo menos três destes animais sejam cães.

2. Determine o conjunto das soluções de cada uma das seguintes inequações:

[2,0] (a) $\left(\frac{1}{8}\right)^{x^2} \leq 2^{6x}$.

[2,0] (b) $\log_{\frac{1}{7}}\left(1 - \frac{8}{x^2-1}\right) \geq 0$.

3. Determine, caso existam, os seguintes limites de sucessões:

[2,0] (a) $\lim\limits_{n\to+\infty} n\,\mathrm{sen}(\frac{1}{n})$.

[2,0] (b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{n+3}{n-4}\right)^{n+8}$.

4. Considere a função f, real de variável real, definida por $f(x) = \begin{cases} x^2\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{x}, & x > 0 \\ \ln\left(\frac{x+4}{3+x}\right), & x < 0 \end{cases}$.

[2,0] (a) Determine o domínio de f.

[2,0] (b) Determine a derivada de f.

[2,0] (c) Determine a equação reduzida da recta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa $\frac{2}{\pi}$.

5. Neste grupo, <u>resolva apenas uma das alíneas</u> (a que preferir).

[2,0] (a) Represente geometricamente (diagrama de *Argand*) o conjunto dos pontos definidos pelas imagens dos números complexos z tais que

$$|z-1-2i| \leq 1 \quad \text{e} \quad \mathrm{Re}(z) > 1.$$

($\mathrm{Re}(z)$ representa a parte real do número complexo z.)

[2,0] (b) Mostre, utilizando o princípio de indução matemática, que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}\ , \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Fim

(Formulário no verso desta folha)

Formulário

- $\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

- $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

- $\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\beta\cos\alpha$

- $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$

- Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n) com razão r:

  Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

  Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1-r^n}{1-r}$

- Regras de derivação:
  $(u+v)' = u' + v'$; $\quad (uv)' = u'v + uv'$; $\quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$; $\quad (u^n)' = nu^{n-1}u' \quad (n \in \mathbb{R})$;
  $(\operatorname{sen} u)' = u'\cos u$; $\quad (\cos u)' = -u'\operatorname{sen} u$; $\quad (\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$;
  $(e^u)' = u'e^u$; $\quad (a^u)' = u'a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$;
  $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$; $\quad (\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$