

O candidato, ao resolver esta prova, compromete-se a não recorrer a qualquer tipo de consulta.

Esta prova é constituída por 5 grupos de questões e tem a cotação total de 20 valores.

Justifique devidamente todas as respostas, indicando o seu raciocínio de forma clara, e apresente os cálculos efectuados.

Cada grupo de questões deve ser resolvido em folhas separadas.

Cotações

- [2,0] 1. Um código JUNE12 consiste numa sequência de quatro letras em que cada letra pertence ao conjunto $\{A, B, C, D, E, F\}$. Calcule o número de códigos JUNE12 em que não há letras repetidas. (Por exemplo, DCAF, BACE e FABD são códigos JUNE12 nas condições pedidas.)

2. Determine o conjunto das soluções de cada uma das seguintes inequações:

[2,0] (a) $\left(\frac{1}{4}\right)^{5-\frac{1}{2}x^2} \leq 2^{3x}$.

[2,0] (b) $\log_{\frac{1}{2}}(2^{-x} - 2) \geq -1$.

[2,0] (c) $x - \frac{2x + 10}{x - 1} \leq 0$.

3. Determine, caso existam, os seguintes limites de sucessões:

[2,0] (a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^{n-5} - 5^{n+4}}{3^{n+7} + 5^{n+2}}$.

[2,0] (b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{4n - 1}{4n - 5}\right)^{4n-9}$.

4. Considere a função f , real de variável real, definida por $f(x) = \begin{cases} \sqrt{5 - |x^2 - 1|}, & x \leq 0 \\ \frac{\sin^2(x)}{1 - \cos(x)}, & x > 0 \end{cases}$.

[2,0] (a) Determine o domínio de f .

[2,0] (b) Estude a continuidade da função f em $x = 0$.

[2,0] (c) Determine a equação reduzida da recta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa $a = \frac{\pi}{2}$.

[2,0] 5. Prove a seguinte igualdade trigonométrica: $\frac{1 + \cos(-x)}{x^2} = \frac{\sin^2(x)}{x^2 - x^2 \cos(x)}$.

Fim

(Formulário no verso desta folha)

Formulário

- $\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$
- $\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \beta \cos \alpha$
- $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta$
- Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n) com razão r :

$$\text{Progressão aritmética: } \frac{u_1 + u_n}{2} \times n$$

$$\text{Progressão geométrica: } u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$$

- Regras de derivação:
 $(u + v)' = u' + v'$; $(uv)' = u'v + uv'$; $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$; $(u^n)' = nu^{n-1}u' \quad (n \in \mathbb{R})$;
 $(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$; $(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$; $(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$;
 $(e^u)' = u'e^u$; $(a^u)' = u'a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$;
 $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$; $(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

- $ax^2 + bx + c = 0$

$$\text{Fórmula resolvente: } x = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$