NOVA SCHOOL OF SCIENCE & TECHNOLOGY
Departamento de Matemática

Acesso ao Ensino Superior de Estudantes Internacionais
Prova de **Matemática** – 27 de Março de 2024
Duração: 2 horas

O candidato, ao resolver esta prova, compromete-se a não recorrer a qualquer tipo de consulta.
Esta prova é constituída por 4 grupos de questões e tem a cotação total de 20 valores.
Justifique devidamente todas as respostas, indicando o seu raciocínio de forma clara, e apresente os cálculos efectuados.
A resolução deve ser efectuada a esferográfica, em folhas brancas sem linhas, e cada grupo de questões deve ser resolvido em folhas separadas.

Cotações

[2,0] **1.** (a) Num autocarro está um grupo de sete amigos e neste grupo estão quatro irmãos. De quantas maneiras diferentes podem estes sete amigos sair do autocarro de forma a que os quatro irmãos saiam consecutivamente?

[2,0] (b) Um código Março27 consiste numa sequência de cinco letras em que cada letra pertence ao conjunto $\{\mathtt{A}, \mathtt{B}, \mathtt{C}, \mathtt{D}\}$. Calcule o número de códigos Março27 que utilizam simultaneamente as quatro letras `A`, `B`, `C` e `D`.
(Por exemplo, `DCAAB`, `DCACB` e `DBADC` são códigos Março27 nas condições pedidas.)

2. Determine o conjunto das soluções de cada uma das seguintes inequações:

[2,0] (a) $\left(\dfrac{1}{6}\right)^{7x-10} \leq \left(\dfrac{1}{6}\right)^{x^2}$.

[2,0] (b) $\log_{\frac{1}{7}}\left(1 - \dfrac{15}{x^2-1}\right) \geq 0$.

[2,0] (c) $\dfrac{x^2}{x-2} \geq -1$.

3. Determine, caso existam, os seguintes limites de sucessões:

[2,0] (a) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{n}{n-1} \times \dfrac{n}{n+1}\right)^{3n^2-7}$.

[2,0] (b) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n - ne^{5/n}\right)$.

[2,0] (c) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{3n+2}{3n-5}\right)^{6n-7}$.

4. Considere a função f, real de variável real, definida por $f(x) = \begin{cases} -2x^3 + e^{1-x^2}, & x \leq 1 \\ \dfrac{\ln(2-x)}{x-1}, & x > 1 \end{cases}$.

[2,0] (a) Determine o domínio de f (apresente o resultado na forma de intervalo ou união de intervalos de números reais) e estude a continuidade da função f em $x = 1$.

[2,0] (b) Determine a equação reduzida da recta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa $a = -1$.

Fim

(Formulário no verso desta folha)

Formulário

- $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

- $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$

- $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

- $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

- $\operatorname{sen}^2(\alpha)+\cos^2(\alpha) = 1$

- $\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\beta\cos\alpha$

- $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$

- Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n) com razão r:

  Progressão aritmética: $\frac{u_1+u_n}{2}\times n$

  Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1-r^n}{1-r}$

- Regras de derivação:
  $(u+v)' = u'+v'$; $\quad (uv)' = u'v+uv'$; $\quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$; $\quad (u^n)' = nu^{n-1}u' \quad (n \in \mathbb{R})$;
  $(\operatorname{sen} u)' = u'\cos u$; $\quad (\cos u)' = -u'\operatorname{sen} u$; $\quad (\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$;
  $(e^u)' = u'e^u$; $\quad (a^u)' = u'a^u\ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+\setminus\{1\})$;
  $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$; $\quad (\log_a u)' = \frac{u'}{u\ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+\setminus\{1\})$

- $ax^2+bx+c = 0$

  Fórmula resolvente: $x = \frac{-b\mp\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$