Acesso ao Ensino Superior de Estudantes Internacionais (2ª Fase)
Prova de **Matemática** – 10 de Julho de 2024
Duração: 2 horas

O candidato, ao resolver esta prova, compromete-se a não recorrer a qualquer tipo de consulta.
Esta prova é constituída por 6 grupos de questões e tem a cotação total de 20 valores.
Justifique devidamente todas as respostas, indicando o seu raciocínio de forma clara, e apresente os cálculos efectuados.
A resolução deve ser efectuada a esferográfica, em folhas brancas sem linhas, e cada grupo de questões deve ser resolvido em folhas separadas.

Cotações

[2,0] **1.** (a) Um código JULHO10 consiste numa sequência de seis letras em que cada letra pertence ao conjunto $\Delta = \{\mathtt{A}, \mathtt{B}, \mathtt{C}, \mathtt{D}\}$. Calcule o número de códigos JULHO10 que utilizam exactamente duas letras (distintas) de $\Delta$. (Por exemplo, ABBAAB, CCCCCB e DBDBDB são códigos JULHO10 nas condições pedidas.)

[2,0] (b) O John tem cinco carros (todos diferentes) e sete motas (todas diferentes) para repartir por duas garagens, a garagem A e a garagem B. O John vai pôr três carros e três motas numa das garagens, e os restantes veículos na outra garagem; ou quatro carros e duas motas numa das garagens, e os restantes veículos na outra garagem. De acordo com estas condições, determine de quantas maneiras diferentes pode o John repartir os doze veículos pelas duas garagens.

**2.** Determine o conjunto das soluções de cada uma das seguintes inequações:

[2,0] (a) $\left|\dfrac{x^2}{x-2}\right| \leq 1$ .

[2,0] (b) $5 \leq e^{-x}(4 + e^{2x})$ .

**3.** Determine, caso existam, os seguintes limites de sucessões:

[2,0] (a) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{3^{2n-7} + 7^{n+9}}{3^{2n-5} - 7^{n-5}}$ .

[2,0] (b) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{8^{n+1}} \left(\frac{8n}{n+1}\right)^n$ .

**4.** Considere a função $f$, real de variável real, definida por $f(x) = \begin{cases} x + \cos(\pi x^3) & , \ x \leq 1 \\ \dfrac{\operatorname{sen}(x-1)}{\sqrt{x}-1} - 2 & , \ x > 1 \end{cases}$ .

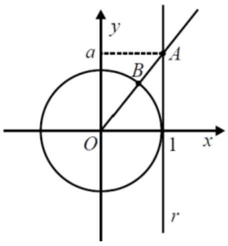
[2,0] (a) Estude a continuidade da função $f$ em $x = 1$.

[2,0] (b) Determine a equação reduzida da recta tangente ao gráfico de $f$ no ponto de abcissa $a = -1$ .

[2,0] **5.** Resolva a equação $-2\operatorname{sen}^2(x) + \cos(x) - 1 = 0$, para $0 \leq x \leq 2\pi$ .

**(Continua na próxima página)**

[2,0] **6.** Na figura abaixo estão representados, num referencial o.n. $xOy$, a circunferência trigonométrica, a reta $r$ de equação $x = 1$, e um ponto $A$, de ordenada $a$ $(a > 1)$, pertencente à reta $r$. Está também representada a semirreta $\dot{O}A$, que intersecta a circunferência trigonométrica no ponto $B$.




A abcissa do ponto $B$ é igual a $\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$? Justifique devidamente a sua resposta.

**Fim**

## *Formulário*

- $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$
- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = 0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$
- $\operatorname{sen}^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$
- $\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\beta\cos\alpha$
- $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$
- Soma dos $n$ primeiros termos de uma progressão $(u_n)$ com razão $r$:

  Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

  Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$
- Regras de derivação:
  $(u+v)' = u' + v'$; $(uv)' = u'v + uv'$; $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$; $(u^n)' = nu^{n-1}u' \quad (n \in \mathbb{R})$;
  $(\operatorname{sen} u)' = u'\cos u$; $(\cos u)' = -u'\operatorname{sen} u$; $(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$;
  $(e^u)' = u'e^u$; $(a^u)' = u'a^u\ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$;
  $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$; $(\log_a u)' = \frac{u'}{u\ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$
- $ax^2 + bx + c = 0$

  Fórmula resolvente: $x = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$