

O candidato, ao resolver esta prova, compromete-se a não recorrer a qualquer tipo de consulta.

Esta prova é constituída por 4 grupos de questões e tem a cotação total de 20 valores.

Justifique devidamente todas as respostas, indicando o seu raciocínio de forma clara, e apresente os cálculos efectuados.

A resolução deve ser efectuada a esferográfica, em folhas brancas sem linhas, e cada grupo de questões deve ser resolvido em folhas separadas.

Cotações

- [2.0] 1. Considere, num plano β , duas retas paralelas r e s . Assinalam-se, na reta r , cinco pontos distintos e, na reta s , um certo número n de pontos, igualmente distintos. Sabe-se que, com os pontos assinalados nas duas retas, é possível definir exactamente 100 triângulos. Determine o valor de n .

2. Determine o conjunto das soluções de cada uma das seguintes inequações:

[2.0] (a) $3^{\frac{x^2-4}{x^2+5}} < 1$.

[2.0] (b) $x^3 \log_2(2x) - x^3 \log_2(x+5) < 0$.

[2.0] (c) $\left| \frac{2x-5}{x-7} \right| \leq 10$.

3. Determine, caso existam, os seguintes limites de sucessões:

[2.0] (a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n!} - \sqrt{(n+1)!})$.

[2.0] (b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \sqrt[n]{\frac{n+1}{n}} \right]$.

[2.0] (c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n^2-3}{n^2} \right)^n$.

4. Considere a função f , real de variável real, definida por $f(x) = \begin{cases} e^x - 1, & x \geq 0 \\ \cos(x) \ln(x+1), & x < 0 \end{cases}$.

- [2.0] (a) Determine o domínio de f (apresente o resultado na forma de intervalo ou união de intervalos de números reais) e estude a continuidade de f .

- [2.0] (b) Mostre que existe $a \in \left] -\frac{\pi}{4}, 1 \right[$ tal que $f(a) = 0$.

- [2.0] (c) Justifique que a função tem um máximo e um mínimo no intervalo $[0, 1]$. Indique os seus valores.

Fim

(Formulário no verso desta folha)

Formulário

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

- $\operatorname{sen}^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$

- $\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \beta \cos \alpha$

- $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta$

- Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n) com razão r :

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

- Regras de derivação:

$$(u + v)' = u' + v'; \quad (uv)' = u'v + uv'; \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}; \quad (u^n)' = nu^{n-1}u' \quad (n \in \mathbb{R});$$

$$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u; \quad (\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u; \quad (\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u};$$

$$(e^u)' = u' e^u; \quad (a^u)' = u' a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\});$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}; \quad (\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

- $ax^2 + bx + c = 0$

Fórmula resolvente: $x = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$