Acesso ao Ensino Superior de Estudantes Internacionais
Prova de **Matemática** – 23 de Maio de 2025
Duração: 2 horas

O candidato, ao resolver esta prova, compromete-se a não recorrer a qualquer tipo de consulta.
Esta prova é constituída por 4 grupos de questões e tem a cotação total de 20 valores.
Justifique devidamente todas as respostas, indicando o seu raciocínio de forma clara, e apresente os cálculos efectuados.
A resolução deve ser efectuada a esferográfica, em folhas brancas sem linhas, e cada grupo de questões deve ser resolvido em folhas separadas.

Cotações

[2,0] **1.** (a) Num comboio está um grupo de oito amigos e neste grupo estão três irmãos. De quantas maneiras diferentes podem estes oito amigos sair do comboio de forma a que os três irmãos saiam consecutivamente?

[2,0] (b) Um código MAIO23 consiste numa sequência de seis letras em que cada letra pertence ao conjunto $\{\mathtt{A}, \mathtt{B}, \mathtt{C}, \mathtt{D}\}$. Calcule o número de códigos MAIO23 que utilizam simultaneamente as quatro letras `A`, `B`, `C` e `D`.
(Por exemplo, `DCAABB`, `DCACBA` e `DBADCC` são códigos MAIO23 nas condições pedidas.)

2. Determine o conjunto das soluções de cada uma das seguintes inequações:

[2,0] (a) $(9 - x^2)3^x < 0$.

[2,0] (b) $x \log_5(x^2 - 1) > x$.

[2,0] (c) $\left|\dfrac{x-2}{x+4}\right| > 1$.

3. Determine, caso existam, os seguintes limites de sucessões:

[2,0] (a) $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{3}{n^3 + 7} \times \sqrt{n - 5} \right)$.

[2,0] (b) $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{3^n + (-5)^{n+1}}{4^{n+2} - 3^n} \right)$.

[2,0] (c) $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{n^3 - 5}{n^3} \right)^{n^2 - 5}$.

4. Considere a função f, real de variável real, definida por $f(x) = \begin{cases} x + 3a, & x \leq 2 \\ \dfrac{x(x-2)}{x^2 - 5x + 6}, & x > 2 \end{cases}$.

[2,0] (a) Determine o domínio de f (apresente o resultado na forma de intervalo ou união de intervalos de números reais) e o valor de a de forma que f seja contínua $x = 2$.

[2,0] (b) Determine a equação reduzida da recta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa $b = 6$.

Fim

(Formulário no verso desta folha)

Formulário

- $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n\in\mathbb{N})$

- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p\in\mathbb{R})$

- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

- $\operatorname{sen}^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)=1$

- $\operatorname{sen}(\alpha+\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cos\beta+\operatorname{sen}\beta\cos\alpha$

- $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$

- Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n) com razão r:

  Progressão aritmética: $\frac{u_1+u_n}{2}\times n$

  Progressão geométrica: $u_1\times\frac{1-r^n}{1-r}$

- Regras de derivação:
  $(u+v)'=u'+v'$; $\quad (uv)'=u'v+uv'$; $\quad \left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$; $\quad (u^n)'=nu^{n-1}u' \quad (n\in\mathbb{R})$;
  $(\operatorname{sen} u)'=u'\cos u$; $\quad (\cos u)'=-u'\operatorname{sen} u$; $\quad (\operatorname{tg} u)'=\frac{u'}{\cos^2 u}$;
  $(e^u)'=u'e^u$; $\quad (a^u)'=u'a^u\ln a \quad (a\in\mathbb{R}^+\setminus\{1\})$;
  $(\ln u)'=\frac{u'}{u}$; $\quad (\log_a u)'=\frac{u'}{u\ln a} \quad (a\in\mathbb{R}^+\setminus\{1\})$

- $ax^2+bx+c=0$

  Fórmula resolvente: $x=\frac{-b\mp\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$