Acesso ao Ensino Superior de Estudantes Maiores de 23 Anos
Prova de **Matemática** – 16 de Junho de 2023
Duração: 2 horas

Esta prova é constituída por 5 grupos de questões e tem a cotação total de 20 valores.
Justifique devidamente todas as respostas, indicando o seu raciocínio de forma clara, e apresente os cálculos efectuados.
Cada grupo de questões deve ser resolvido em folhas separadas.

Cotações

[2,0] **1.** Um código JUNHO16 consiste numa sequência de cinco letras em que cada letra pertence ao conjunto $\{\mathtt{A}, \mathtt{B}, \mathtt{C}, \mathtt{D}, \mathtt{E}, \mathtt{F}\}$. Calcule o número de códigos JUNHO16 em que a letra `A` ocorre exactamente duas vezes. (Por exemplo, `ADCAF`, `ABABB` e `DABDA` são códigos JUNHO16 nas condições pedidas.)

2. Determine o conjunto das soluções de cada uma das seguintes inequações:

[2,0] (a) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2x} \geq \left(\frac{1}{4}\right)^{x+6}$.

[2,0] (b) $\log_{\frac{1}{2}}\left(2^{-x}-2\right) \geq -1$.

[2,0] (c) $\dfrac{x^2}{x-2} \geq -1$.

3. Determine, caso existam, os seguintes limites de sucessões:

[2,0] (a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3^{n-7}+7^{n-4}}{3^{n-5}-7^{n-6}}$.

[2,0] (b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{7n+8}{7n-6}\right)^{5n-3}$.

4. Considere a função f, real de variável real, definida por $f(x) = \begin{cases} \sqrt{6-|x^2-2|}, & x \leq 0 \\ \dfrac{x\,\mathrm{sen}(x)}{1-\cos(x)}, & x > 0 \end{cases}$.

[2,0] (a) Determine o domínio de f.

[2,0] (b) Estude a continuidade da função f em $x = 0$.

[2,0] (c) Determine a equação reduzida da recta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa $a = \frac{\pi}{2}$.

[2,0] **5.** Demonstre que, para qualquer $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\, k \in \mathbb{Z}\}$, se tem

$$\left(\mathrm{sen}^2(x) - \cos^2(x)\right)\left(\mathrm{tg}^2(x)+1\right) = \mathrm{tg}^2(x) - 1.$$

Fim

(Formulário no verso desta folha)

Formulário

- $\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$
- $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$
- $\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$
- $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$
- $\operatorname{sen}^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$
- $\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\beta\cos\alpha$
- $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$
- Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n) com razão r:

  Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

  Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1-r^n}{1-r}$
- Regras de derivação:
  $(u+v)' = u' + v'$; $\quad (uv)' = u'v + uv'$; $\quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$; $\quad (u^n)' = nu^{n-1}u' \quad (n \in \mathbb{R})$;
  $(\operatorname{sen} u)' = u'\cos u$; $\quad (\cos u)' = -u'\operatorname{sen} u$; $\quad (\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$;
  $(e^u)' = u'e^u$; $\quad (a^u)' = u'a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$;
  $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$; $\quad (\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$
- $ax^2 + bx + c = 0$

  Fórmula resolvente: $x = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$