FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Acesso de Maiores de 23 anos

Prova escrita de Matemática

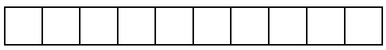
9 de junho de 2016

Duração da prova: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos.

Primeira Parte

As oito questões desta primeira parte são de escolha múltipla. Para cada uma delas são indicadas quatro alternativas, das quais apenas uma está correta. Escreva na folha de resposta a letra correspondente à alternativa que selecionar para responder a cada questão. Se apresentar mais do que uma resposta a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível. Não apresente quaisquer cálculos.

1. Considere a seguinte figura, constituída por 10 quadrados:



Pretende-se colorir três destes quadrados de Verde, dois de Rosa, quatro de Encarnado e um de Azul.
Quantas formas há de o fazer?

A)1152 B) 12600 C) 8762 D) 11600

2. Considere o polinómio $P(x) = (3 + 2x^2)^9$. Considerando este mesmo polinómio na sua forma reduzida, qual é o coeficiente do monómio x^8?

A) 326592 B) 462002 C) 489888 D) 336692

3. Considere a função definida em $\mathbb{R}^+$por $f(x) = 10log_3\left(\frac{\sqrt{x}}{27}\right)$.
Qual das seguintes expressões pode também definir a função f ?

A) $\frac{20}{3}log_3(x) - \frac{3}{10}$ B) $5log_3(x) - 3$ C) $5log_3(x) - \frac{10}{3}$ D) $5log_3(x) - 30$

4. Considere a função f definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = \ln(2 + \cos x)$. Qual das seguintes expressões define a função derivada de f ?

A) $\frac{\cos x}{2+\sin\ x}$ B) $\frac{\sin x}{2+\cos x}$ C) $\frac{-\sin x}{2+\cos x}$ D) $\frac{-\cos\ x}{2+\sin\ x}$

5. Considere a sucessão geométrica (u_n) tal que $u_4 = 54$ e $u_9 = 13122$
Qual é a razão desta sucessão?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5

6. Considere um número complexo não nulo z, de argumento $\frac{\pi}{12}$.
A que quadrante do plano complexo pertence a imagem geométrica de $-i\bar{z}$?

A) Ao 1.º Quadrante B) Ao 2.º Quadrante C) Ao 3.º Quadrante D) Ao 4.º Quadrante

7. Qual das seguintes condições define, no plano complexo, uma reta paralela à semirreta definida por $\arg z = \frac{\pi}{4}$?

A) $Re(z) = \frac{\pi}{4}$ B) $Im(z) = \frac{\pi}{4}$ C) $|z-1| = |z+i|$ D) $|z| = |z+i-1|$

8. Considerado um referencial ortonormado do espaço, qual é a equação cartesiana do plano que passa pelo ponto $P(1,0,1)$ e é paralelo ao plano de equação $3x + y - z + 3 = 0$?

A) $x + z - 2 = 0$ B) $6x + 2y - 2z - 4 = 0$ C) $x + y - 1 = 0$ D) $3x + y - z + 2 = 0$

Segunda Parte

Nas questões desta segunda parte apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

9. Considere os números complexos $w = 1 + 2i$ e $z = 7 + 21i$.

a) Sabendo que w é uma raiz quarta de um certo número complexo z_0, determine as restantes raízes quartas de z_0.

b) Determine, justificando, a que quadrante pertence a imagem geométrica do número complexo $4z\text{cis}(\alpha)$, sabendo que $\alpha \in \left]\frac{3\pi}{4}, \pi\right[$.

10. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória. Dado um acontecimento $X \subset \Omega$, denota-se por $P(X)$ a probabilidade de X e por $\bar{X}$ o acontecimento contrário de X.

Sejam A e B dois acontecimentos possíveis. Sabe-se que:

- $P(A \cap B) = 0{,}1$
- $P(A \cup B) = 0{,}8$
- $P(A|B) = 0{,}25$

Mostre que os acontecimentos A e $\bar{A}$ são equiprováveis.

11. Uma turma de uma dada Universidade é constituída por alunos portugueses e por alunos estrangeiros. Sabe-se que:

- 25% dos alunos são portugueses;
- 55% dos alunos são do sexo feminino;
- 3 em cada 5 alunos portugueses são do sexo masculino.

Escolhido um elemento desta turna ao acaso, qual é a probabilidade de se tratar de uma aluna estrangeira?

12. Considere as funções f e g, de domínio $\mathbb{R}^+$, definidas respetivamente pela expressões $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1+\ln x}{x}$ e $g(x) = x^2 - 2\ln x$.
Utilizando meios exclusivamente analíticos:

a) Determine os intervalos de monotonia de g e conclua que para todo o $x > 0, g(x) > 0$.
b) Estude a existência de assíntotas ao gráfico de f.
c) Determine os intervalos de monotonia de f.
d) Faça um esboço do gráfico de f.

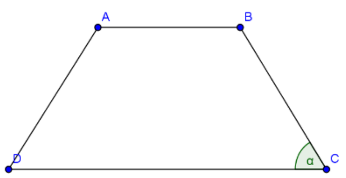
13. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(4x)}{e^{2x} - 1} & se\ x < 0; \\ \dfrac{\sqrt{x+1} - 1}{x} & se\ x > 0; \end{cases}$$

Responda às seguintes questões utilizando métodos exclusivamente analíticos.

a) Calcule os limites laterais de f em $x = 0$. É possível atribuir um valor a $f(0)$ por forma a obter-se uma função contínua em $\mathbb{R}$?
b) Mostre a existência de $x_0 \in]3\,,8[$ tal que $f(x_0) = \frac{7}{24}$.

14. Considere um trapézio isósceles $[ABCD]$, com $\overline{BC} = \overline{AD} = 6cm$, $AB\ //\ DC$, $\overline{AB} < \overline{CD}$ e $\overline{AB} = 5$ cm. Seja $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ a amplitude, em radianos, do ângulo $\widehat{DCB}$.



a) Sendo θ a medida de amplitude do ângulo $\widehat{BDC}$, mostre que

$$\tan\theta = \frac{6\sin\alpha}{5 + 6\cos\alpha}$$

b) Calcule o valor exato de $\cos\theta$ sabendo que $\tan\alpha = 4$.

Cotações

Primeira parte……….……………………………………………………………40 pontos

Cada resposta certa…………………….………………………5 pontos

Cada resposta errada…………………………….……………..0 pontos

Cada questão não respondida ou anulada………….…………..…0 pontos

Segunda parte……….……………………………………………..…………160 pontos

9……………………………………..……….…………30 pontos

9.a…………………………………..15 pontos

9.b…………………………………..15 pontos

10……………………………………..……..………...20 pontos

11……………………………………..…..…………...20 pontos

12…………………………………..…..…………………...50 pontos

12.a……………………………………15 pontos

12.b……………………………………10 pontos

12.c……………………………………15 pontos

12.d……………………………………10 pontos

13………………………………..…..…………………..15 pontos

13.a……………………………………10 pontos

13.b…………………………………...5 pontos

14……………………………………………………….25 pontos

14.a…………………………………..10 pontos

14.b……………………..…………15 pontos